CAMPO ELÉCTRICO (Tema 4 del texto)

1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA Y CONCEPTOS GENERALES.

1.1 Electrostática

La *electrostática* es la parte de la física que estudia los fenómenos asociados a las *cargas eléctricas en reposo.* El término *eléctrico*, y todos sus derivados, tiene su origen en las experiencias realizadas por Tales de Mileto, un filósofo griego que vivió en el siglo sexto antes de Cristo. Tales estudió el comportamiento de una resina fósil, el ámbar - en griego *elektron-,* observando que cuando era frotada con un paño de lana adquiría la propiedad de atraer hacia sí pequeños cuerpos ligeros; lo mismo sucede si una varilla de vidrio se frota con un paño de seda. Aun cuando ambas varillas pueden atraer objetos ligeros, como hilos o trocitos de papel, la propiedad eléctrica adquirida por frotamiento no es equivalente en ambos casos. Así, puede observarse que dos barras de ámbar electrizadas se repelen entre sí, y lo mismo sucede en el caso de que ambas sean de vidrio. Sin embargo, la barra de ámbar es capaz de atraer a la de vidrio y viceversa.

Este tipo de experiencias llevaron a W. Gilbert (1544-1603) a distinguir, por primera vez, entre la electricidad que adquiere el vidrio y la que adquiere el ámbar. Posteriormente Franklin al tratar de explicar la electricidad la consideró como un fluido eléctrico y llamó a la electricidad "vítrea" de Gilbert *electricidad positiva* (+) y a la "resinosa" *electricidad negativa* (-).

Las experiencias de electrización pusieron de manifiesto las siguientes propiedades:

1.2 Propiedades de las cargas eléctricas

A.- ***Cargas eléctricas de distinto signo se atraen y cargas eléctricas de igual signo se repelen***. La existencia de dos tipos de electricidad ya se comentó anteriormente.

B.- Principio de Conservación de la carga eléctrica. ***La carga eléctrica ni se crea ni se destruye***: los cuerpos *neutros* no lo son porque carezcan de carga sino porque tienen igual número de cargas positivas que negativas. Cuando frotamos una de las varillas anteriores, lo que conseguimos es que los electrones de los átomos que están en contacto por la fricción pasen de una sustancia a otra (del paño a la resina o del vidrio a la seda) y por eso uno de ellos queda cargado negativamente (el que ha conseguido ganar los electrones), mientras que el otro queda positivizado en la misma magnitud, pero con signo contrario. Por eso la carga ni se crea ni se destruye, sólo se redistribuye en el proceso de frotamiento.

C.- Cuantización de la carga eléctrica: Evidentemente, siguiendo con el ejemplo anterior, la carga positiva de la lana será un *múltiplo entero de veces n* la carga de un protón (n será el nº de electrones que han saltado al ámbar) y asimismo la carga del ámbar será n veces la del electrón. En este sentido se dice que la carga está cuantizada: ***Sólo podemos conseguir cargas múltiplo de la carga del electrón*** (con signo + o – según falten o sobren).

La electrización de un cuerpo puede tener lugar de otras maneras además del **frotamiento**. Existe la ***electrización por contacto***, que se produce al poner en contacto un cuerpo cargado con otro sin carga: se produce un reparto de carga eléctrica entre los dos que se efectúa en una proporción que depende de la geometría de los cuerpos y de su composición. También existe la posibilidad de electrizar un cuerpo neutro mediante otro cargado sin ponerlo en contacto con él. Se trata, en este caso, de una **electrización a distancia o *por inducción*.** Si el cuerpo cargado lo está positivamente la parte del cuerpo neutro más próximo se cargará con electricidad negativa y la opuesta con electricidad positiva. La formación de estas dos regiones o *polos* de características eléctricas opuestas hace que a la electrización por influencia se la denomine también *polarización eléctrica.* A diferencia de la anterior este tipo de electrización es transitoria y dura mientras el cuerpo cargado se mantenga suficientemente próximo al neutro. Esta es la responsable de que las barras de vidrio o ámbar previamente cargadas atraigan pequeños trozos de papel (neutro): Inducen el desequilibrio de cargas en la zona cercana a la barra, atrayendo a las de signo contrario hacia sí. También inducen transitoriamente un desequilibrio de cargas en un electrómetro provocando la separación de sus placas.

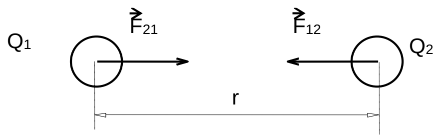
1.3 Conductores y aislantes

Hay cuerpos, como las 2 varillas o los tejidos citados antes, que ponen muchas dificultades al movimiento de las cargas eléctricas por su interior y cuando se produce un desequilibrio de cargas éstas permanecen en el lugar en donde se han creado. Otros, por el contrario, facilitan tal redistribución de modo que la electricidad afecta finalmente a todo el cuerpo. Los primeros se denominan ***aislantes*** y los segundos ***conductores.***

Esta diferencia de comportamiento de las sustancias respecto del desplazamiento de las cargas en su interior depende de su naturaleza íntima. Así, los átomos de las sustancias conductoras poseen electrones externos muy débilmente ligados al núcleo en un estado de semilibertad que les otorga una gran movilidad, tal es el caso de los metales. En las sustancias aislantes, sin embargo, los núcleos atómicos retienen con fuerza todos sus electrones, lo que hace que su movilidad sea escasa.

2 LEY DE COULOMB.

Aun cuando los fenómenos electrostáticos fundamentales eran ya conocidos en la época de Charles August Coulomb (1736-1806), no se conocía aún la proporción en la que esas fuerzas de atracción y repulsión variaban. Fue este ingeniero francés el que experimentalmente llegó a la conclusión de que la fuerza entre cargas era *directamente proporcional al valor de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros*. Esta ley, denominada en su honor ley de Coulomb, puede escribirse para dos cargas situadas en el vacío como



$$\left|\vec{F}\right| = \boldsymbol{K_0}\frac{|\boldsymbol{Q_1}|\cdot|\boldsymbol{Q_2}|}{\boldsymbol{r^2}}$$

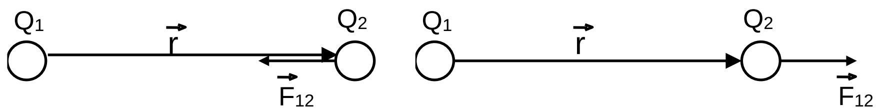
siendo K_0 la constante electrostática en el vacío (la fuerza entre cargas depende también del medio en que estén inmersas, como estudiaremos más adelante), Q_1 y Q_2 las cargas que ejercen las fuerzas (como estamos calculando el módulo, las cargas deben ponerse en valor absoluto, sin signo) y r la distancia que las separa, si son puntuales, o la distancia entre sus centros, si tienen simetría esférica.

La fuerza sobre cada partícula se puede expresar vectorialmente en función del vector de posición con respecto a la otra:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{K_0}\frac{\boldsymbol{Q_1}\cdot\boldsymbol{Q_2}}{\boldsymbol{r^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$$

Q_1 y Q_2 tienen signos contrarios. $Q_1Q_2<0$. **F** y **r** tienen sentidos contrarios

Q_1 y Q_2 tienen igual signo. $Q_1Q_2>0$. F y r tienen igual sentido



Observar la similitud que existe entre esta expresión y la ley de gravitación universal. La diferencia entre las dos expresiones vectoriales para la fuerza se encuentra en el signo. Si las dos cargas tienen igual signo, su producto será positivo y entonces la fuerza tendrá igual sentido que el vector posición, es decir, será repulsiva. Si las cargas tienen signos contrarios, su producto será negativo y la fuerza se opondrá al vector posición; será por tanto atractiva. (Como entonces, $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ es un vector unitario en esa dirección).

En el sistema internacional se elige como magnitud fundamental la intensidad de la corriente eléctrica y como unidad de dicha magnitud se elige el ***amperio***[1]. Según esto, el ***culombio***, la unidad de carga en este sistema, se define como la carga que atraviesa la sección de un conductor por el que circula una corriente de un amperio durante un segundo. Obsérvese que en este sistema de unidades la carga Q es magnitud derivada de la intensidad I. Con una definición para la unidad de carga, ahora podemos determinar experimentalmente cuál es el valor en el S.I. de la K_0, que resulta ser [2] de aproximadamente $9\cdot10^9$ $N\cdot m^2/C^2$.

La ley de Coulomb escrita anteriormente se suele escribir también en lo que se denomina ***forma racionalizada***, que supone escribir la constante K_0 como $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, siendo ε_0 la denominada c*onstante dieléctrica del vacío*, cuyo valor en el S.I. es, según la definición anterior, $\frac{1}{4\pi K_0} = 8{,}84\cdot10^{-12}$ $C^2/N\cdot m^2$ (observar el cambio producido en las unidades). Según esto, podemos escribir la ley de Coulomb para el vacío como:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

La fuerza entre cargas, como decíamos antes, depende, además de las cargas y la distancia, del medio existente entre ellas y esa dependencia se introduce en la ecuación a través del valor de la constante

[1] El *amperio (A)* se define como la intensidad de una corriente que, circulando en el mismo sentido por dos conductores rectilíneos y paralelos, situados en el vacío y separados una distancia de un metro, origina en cada uno de ellos una fuerza atractiva de $2\cdot10^{-7}$ N por cada metro de longitud. Lo veremos en el siguiente tema.

[2] Se puede hallar el valor de K_0 mediante razonamientos teóricos basados en la teoría de la relatividad y su valor es $K_0=10^{-7}c^2$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío (c=299.790 km/s). Según dicha expresión, el valor verdadero de la constante electrostática en el vacío es de $8{,}987\cdot10^9$ $N\cdot m^2/C^2$, que se suele aproximar a $9\cdot10^9$ $N\cdot m^2/C^2$.

electrostática, K, que tiene un valor concreto para cada medio. En cualquier medio que no sea el vacío la fuerza eléctrica entre dos cargas se hace menor, definiéndose la **permitividad relativa** (o, en desuso, *constante dieléctrica del medio*)**, ε_r, como el cociente entre el valor de la fuerza eléctrica en el vacío y en ese medio., $\varepsilon_r=F_0/F$ (o sea, $\varepsilon_r=K_0/K$.)**. La permitividad relativa ε_r es por tanto adimensional y siempre mayor que 1.

Por ejemplo, cuando dos cargas se encuentran sumergidas en agua la fuerza eléctrica se hace 81 veces menor que la fuerza de esas mismas cargas separadas a la misma distancia en el vacío. Podemos escribir que la $F=F_0/81$. La permitividad relativa del agua será por tanto $F_0/F=81=\varepsilon_r$. Por tanto:

$$\vec{F}=\frac{\vec{F}_0}{\varepsilon_r}=\frac{\boldsymbol{K_0}}{\boldsymbol{\varepsilon_r}}\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}\vec{u}_r=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}}\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}\vec{u}_r=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon}}\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Donde se ha usado, en el último paso, la denominada **permitividad absoluta** (o *constante dieléctrica absoluta* o constante dieléctrica, a secas), que se suele designar igual, ε, **definida como el producto de la permitividad relativa del medio por la permitividad del vacío $\varepsilon=\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0$**. Aunque a veces se use el mismo nombre, **permitividad eléctrica**, para la permitividad relativa y la permitividad absoluta, no hay confusión posible por los valores (la relativa es mayor que 1 y la absoluta siempre ronda el 10^{-12} como ε_0) y las unidades (la relativa no tiene y la absoluta sí, las de ε_0). En este último caso se escribe la ley de Coulomb como indica la última de las expresiones anteriores.

2.1 Comparación entre los campos eléctricos y gravitatorios:

Como se ha podido comprobar del estudio anterior, las dos fuerzas, la eléctrica y la gravitatoria, tienen muchos elementos en común. Las 2 son centrales y por tanto conservativas, las dos son proporcionales a las respectivas magnitudes propias m y Q y los dos decrecen con el cuadrado de la distancia de separación. Sin embargo, también difieren en otros elementos.

Fuerza eléctrica	Fuerza gravitatoria
• Puede ser atractiva o repulsiva..	• Siempre atractiva
• Depende del medio en que se encuentren las cargas.	• Independiente del medio.
• K es muy grande, lo que convierte a la fuerza eléctrica en una fuerza muy intensa.	• G es muy pequeña (despreciable si hay fuerza eléctrica, como en el átomo de Bohr).
• Carga cuantizada.	• Masa no cuantizada.
• Cuando una carga se mueve genera un campo magnético.	• Las masas se atraen igual en reposo o movimiento.

3 CAMPO ELÉCTRICO.

Al igual que el campo gravitatorio, se define el campo eléctrico existente en un punto por los efectos que produce en una carga eléctrica colocada en dicho punto, es decir:

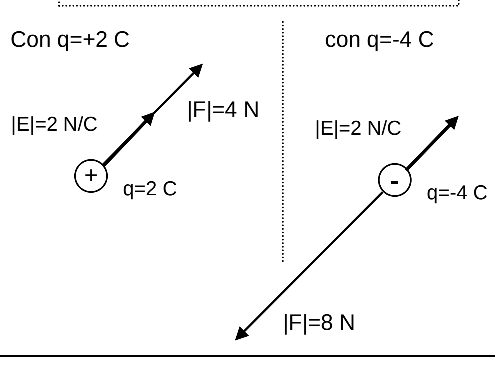
Se define el vector intensidad del campo eléctrico o vector **campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto como el cociente entre la fuerza que sufre una determinada carga q, colocada en dicho punto y la carga q** (dicho de otra manera, la fuerza por unidad de carga en cada punto de la región donde existe el campo)

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$$

El vector campo tendrá como unidad en el S.I. el N/C.

Es interesante darse cuenta de que el valor del campo eléctrico en un punto no depende de la carga q empleada, con lo cual **se cumple la premisa fundamental de un campo vectorial de que en cada punto debe tener un único valor**. Así, si colocamos una carga q=2 C en un punto determinado y medimos la fuerza que el campo ejerce sobre ella y resulta ser, por ej., F= 4 N, diremos que el campo en ese punto tiene de módulo E=4/2=2 N/C, con la misma dirección y sentido que la fuerza. Si utilizásemos para medir el campo en ese punto una carga prueba de valor q= -4 C (doble de la anterior y de signo contrario), la proporcionalidad que

Cálculo del campo eléctrico en un punto



manifiesta la ley de Coulomb nos garantiza que la fuerza que ahora sentiría esa carga colocada en el mismo punto sería doble de la anterior y de sentido contrario, es decir, F=8 N, pero el campo seguiría siendo el mismo, es decir, su módulo sería E=8/4=2 N/C (positivo por ser un módulo), y su sentido sería el de antes, ya que como F se ha invertido y q es negativa, ambos efectos se contrarrestan en la expresión vectorial del campo.

3.1 Intensidad del campo eléctrico creado por cargas puntuales.

Si al colocar una carga q en un punto del espacio experimenta una fuerza de tipo eléctrico es porque otra u otras cargas producen ese campo eléctrico. Se puede producir un campo eléctrico con cargas puntuales (consideradas de tamaño despreciable) o bien con una distribución continúa de carga (con una placa cargada uniformemente o un hilo cargado uniformemente). Ahora resolveremos el primer caso (para el segundo debemos usar el teorema de Gauss, que veremos luego). Si denominamos Q a las cargas que crean el campo, podemos distinguir dos casos:

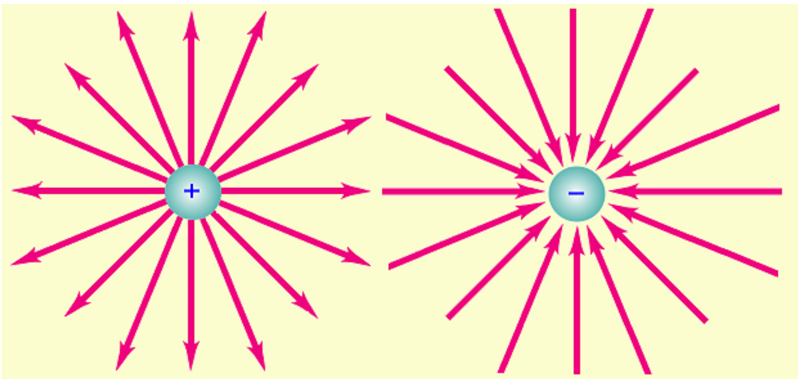
A.- Si el campo $\vec{E}$ lo crea una única carga puntual Q, en ese caso podemos calcular la fuerza soportada por nuestra carga q colocada en un punto cualquiera mediante la ley de Coulomb y operar:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{\cancel{q}} \cdot K_0 \frac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{u}_r = \boldsymbol{K_0 \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r}$$

Se pueden estudiar fácilmente las **características del vector intensidad de campo** creado por una carga eléctrica puntual a partir de la ecuación anterior:

- Su módulo disminuye con el cuadrado de la distancia.
- Su dirección es radial, ya que viene dada por la dirección de $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{r}|}$, que es el vector unitario radial.
- Su sentido es radial saliendo de las cargas positivas (Q>0) o se dirige radialmente hacia ellas si la carga es negativa (Q<0). Para recordar este hecho se suele decir que las **cargas positivas** son ***manantiales de campo*** y las **negativas *sumideros de campo***.

Esto puede verse en la figura siguiente.



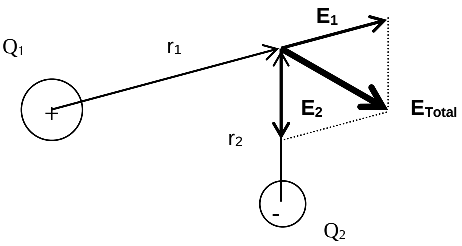
B.- Si son varias las cargas que crean el campo Q_1, Q_2, Q_3, ..., entonces aplicaremos, al igual que hacíamos en el campo gravitatorio, el denominado ***Principio de Superposición***. Básicamente afirma que las cargas Q_i que actúan sobre q no se influyen entre si, es decir, que la fuerza que la Q_1 hace sobre q no se ve influida por la presencia de Q_2, Q_3,…. Por tanto, la fuerza total sobre q será la suma de las fuerzas que cada Q_i haría si estuviese sola.

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\vec{F}_{total}}{q} = \frac{\vec{F}_{Q_1 q} + \vec{F}_{Q_2 q} + \vec{F}_{Q_3 q} + \cdots}{q} = \frac{1}{\cancel{q}} \cdot \left(K_0 \frac{Q_1 \cdot \cancel{q}}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} + K_0 \frac{Q_2 \cdot \cancel{q}}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} + K_0 \frac{Q_3 \cdot \cancel{q}}{r_3^2} \vec{u}_{r_3} + \cdots \right)$$

$$= K_0 \frac{Q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} + K_0 \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} + K_0 \frac{Q_3}{r_3^2} \vec{u}_{r_3} + \cdots = \vec{\boldsymbol{E}}_1 + \vec{\boldsymbol{E}}_2 + \vec{\boldsymbol{E}}_3 + \cdots$$

El campo en un punto se obtiene sumando *vectorialmente* los campos creados por cada una de las cargas en ese punto, es decir:

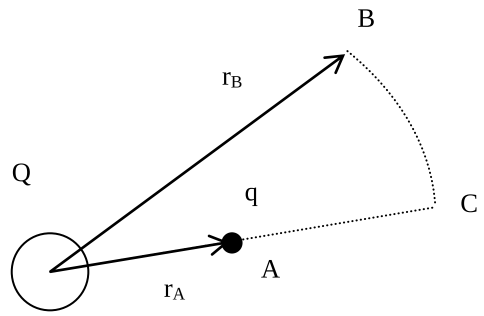
$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_1 + \vec{\boldsymbol{E}}_2 + \vec{\boldsymbol{E}}_3 + \cdots = \sum \vec{\boldsymbol{E}}_i, \boldsymbol{siendo\ el\ valor\ de\ cada\ campo}\ \vec{\boldsymbol{E}}_i = \boldsymbol{K_0 \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}}$$



Hay que tener la precaución, cuando se aplique el principio de superposición, de hacer la ***suma vectorial*** de cada uno de los campos individuales. Así, por ejemplo, el campo creado por las cargas Q_1 y Q_2 en el punto P seria el indicado en la figura.

Una vez conocido el campo eléctrico en un punto, podemos calcular cuál sería la fuerza que se haría sobre un carga q colocada en dicho punto mediante la ecuación que define el campo eléctrico, es decir $\vec{F} = q\vec{E}$, **de tal manera que si la carga q es positiva, experimentará una fuerza en el *mismo sentido* que el campo eléctrico, mientras que si q es negativa la fuerza será *contraria* al campo eléctrico**.

4 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA



Al igual que el campo gravitatorio, el campo eléctrico es un campo central y por tanto es conservativo. La fuerza eléctrica realiza un trabajo que es independiente de la trayectoria y por tanto se puede hallar el trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando una carga q se desplaza desde un punto A hasta otro punto B por un camino cualquiera dentro del campo creado por *1 sola carga* Q. Elegiremos para que el cálculo sea más sencillo un camino radial que nos lleve hasta el punto C, situado a igual radio que B (r_C=r_B) y otro camino que sea un arco de circunferencia desde C hasta B. **Podemos elegir el camino que deseemos puesto que por todos ellos obtendríamos el mismo trabajo**. Usando la definición de la energía potencial obtendremos su expresión para nuestro sistema de dos cargas.

$$W_{F.eléctrica} = -\Delta E_p = E_{P_A} - E_{P_B} =$$

$$\int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_C} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{r_C}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_C} K_0 \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot dr \cdot cos0° = K_0\, Q \cdot q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = K_0 \frac{Q \cdot q}{r_A} - K_0 \frac{Q \cdot q}{r_B}$$

De donde, por comparación, podemos deducir la expresión para la energía potencial:

$$E_P = K_0 \frac{Q \cdot q}{r}$$

4.1 Estudio de la energía potencial eléctrica:

- **Uso del potencial:** Usaremos el concepto de potencial para calcular el W realizado por la fuerza eléctrica para situar dos cargas que se encuentran inicialmente a una distancia r_A hasta una distancia r_B. Para ello usaremos la expresión:

  W_{AB}=E_P(A)-E_P(B)

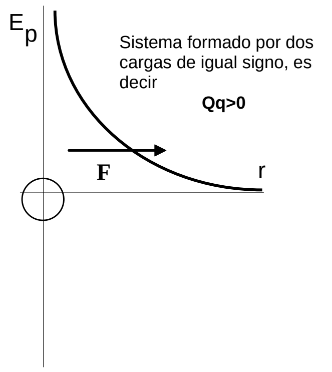
  Independientemente del camino que sigan las cargas para separarse. Si r_A=r_B, el W_{AB}=0 (para cualquier camino cerrado). *Hemos hecho una integral antes para no volver a hacerla nunca más*.
- **Definición de la E_P (Significado físico):** Podemos definir la energía potencial teniendo en cuenta que cuando 2 cargas están separadas infinitamente su valor es 0 y que está relacionada con el W que hace la fuerza eléctrica. Si tomamos B como ∞, quedaría **$W_{A\to\infty}$=E_P(A)**

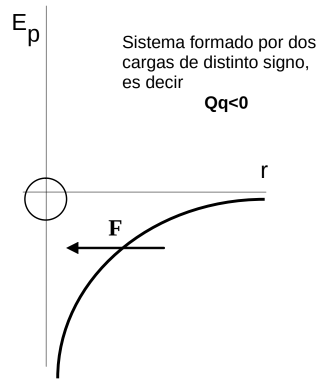
  "**La energía potencial de un sistema de 2 cargas Q y q separadas una distancia r es igual al trabajo que realiza la fuerza eléctrica cuando esas 2 cargas se separan hasta encontrarse a una distancia infinita la una de la otra**".
- **Signo de la E_P:** A diferencia del campo gravitatorio cuya E_p era siempre negativa, ahora se pueden presentar los dos posibles signos. Las gráficas de E_p en función de la separación entre cargas son las siguientes:
  - Si Q y q tienen igual signo, el producto Qq>0 y el sistema tiene siempre E_P positiva, que se hace más pequeña cuanto más separadas están las cargas, cuanto mayor es r. La fuerza entre ellas será repulsiva y su sentido apuntará hacia ∞, que es donde la E_P es mínima (valor 0). **Las cargas se separan espontáneamente (se repelen) buscando tener la menor E_P posible** (si nada lo impide, hasta el ∞, hasta tener 0 de E_P).
  - Si las cargas tienen signos contrarios, el producto Qq es negativo y la E_p del sistema será negativa, que se hace menor cuanto más cerca están las cargas entre sí (si r disminuye, E_P disminuye también debido a que el cociente $K_0 \frac{Q \cdot q}{r}$ se hace más negativo. Ahora la separación infinita de las cargas, la E_P=0, es el máximo de energía potencial, el valor mínimo estará en r=0 (las cargas

pegadas la una a la otra). **Las cargas se acercarán espontáneamente, ya que se atraen, y en el proceso disminuirá su energía potencial** (de un valor negativo a otra más negativo aún, menor).

Como vemos de los 2 razonamientos anteriores la fuerza eléctrica siempre apunta hacia valores mínimos de la energía potencial y por tanto las cargas, que se moverán espontáneamente en sentido de la fuerza eléctrica, tienden a disminuir su energía potencial

- **<u>Signo del W:</u>** Hemos visto en los ejemplos anteriores que la evolución espontánea de las cargas, sean del mismo signo o distinto, es a disminuir su energía potencial (luego lo analizaremos desde otro punto de vista). Por tanto, **en un proceso espontáneo el W realizado por la fuerza eléctrica será positivo,** porque la Ep(B)<Ep(A) y entonces W=Ep(A)-Ep(B)>0. El signo positivo indicará espontaneidad del proceso, ocurre sin intervención externa. Sin embargo, **si el W realizado por la fuerza eléctrica es negativo es porque el proceso no es espontáneo**, ya que eso significará que Ep(B) es mayor que Ep(A), es decir, se ha desplazado la carga q de un punto de menor potencial a otro de mayor potencial y ese proceso, por lo visto anteriormente, es no espontáneo.





Si queremos que dicha carga vaya de A a B habrá que trasladarla mediante una fuerza exterior $\vec{F}_{externa} = -\vec{F}_{eléctrica}$ y por tanto, el $W_{externo} = -W_{eléctrico} = E_P(B) - E_P(A) = \Delta E_P$. Debemos prestar atención a lo que nos piden en cada problema, **si el trabajo que el sistema hace (típica situación de proceso espontáneo) o el que hay que hacer (típica situación de proceso no espontáneo)**.

- **<u>Relación F-E$_p$</u>**: Igual que hemos calculado la E_P a partir de la fuerza, podemos hallar la segunda en función de la primera. Hemos visto que:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{P_A} - E_{P_B} = \left. \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \right]_A^B$$

Comparando las dos expresiones podemos escribir que:

$$\boldsymbol{E_P} = -\int \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{d\vec{r}}$$

Si la energía potencial es menos la primitiva de la fuerza, ésta será la derivada de la energía potencial, cambiada de signo, a la que añadiremos el vector unitario radial que le dará dirección y sentido:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\frac{d\boldsymbol{E_P}}{dr}\vec{u}_r$$

De esta expresión se pueden extraer las mismas conclusiones que obtuvimos antes. Si la E_P aumenta al aumentar r, sabemos que su derivada, la pendiente de su gráfica, será positiva, por lo que F apuntará (al ser menos la derivada) en sentido contrario a $\vec{u}_r$, es decir, apuntará hacia el origen de r, en sentido contrario al aumento, hacia E_P decrecientes. La misma conclusión final podemos obtener si la E_P disminuye con r.

5 POTENCIAL ELÉCTRICO.

Como el campo eléctrico es conservativo se puede definir una magnitud, que tendrá un valor único en cada punto igual que el campo **E**, pero con la diferencia de que será una magnitud escalar. Se la denomina *potencial eléctrico*, V y se define para cada punto de un campo como la energía potencial por unidad de carga colocada en ese punto. Es decir, si colocamos una carga arbitraria q en el punto donde queremos medir el potencial y resulta que su energía potencial en ese punto es E_p, definiríamos V en ese punto como:

$$V_{eléctrrico} = \frac{E_P\ (eléctrica)}{q}$$

Siendo q la carga prueba que soporta el campo.

Su unidad en el S.I. sería el J/C, que se denomina *Voltio* (V), en honor al físico italiano Alejandro Volta (1754-1827). La definiremos luego.

5.1 Potencial creado por cargas puntuales.

Al igual que el campo eléctrico, para calcular el potencial en un punto en función de las cargas puntuales que originan dicho potencial se nos pueden plantear dos casos:

A.- Que el campo eléctrico sea creado por una sola carga Q. El potencial en un punto de ese campo se puede calcular usando la definición de V vista anteriormente y la fórmula para la E_P de dos cargas y obtendremos:

$$V_{eléctrrico} = \frac{E_P\ (eléctrica)}{q} = \frac{K_0 \frac{Q \cdot q}{r}}{q} = K_0 \frac{Q}{r}$$

Ahora, Q es la carga que origina el campo. Es importante darse cuenta de que la carga Q debe ponerse **con su signo**, puesto que esta expresión define un escalar.

B.- Que el campo lo creen varias cargas Q_1, Q_2, ... En este caso es necesario aplicar el *principio de superposición* y sumar los potenciales que cada una de las cargas Q_i crearía en ese punto, es decir:

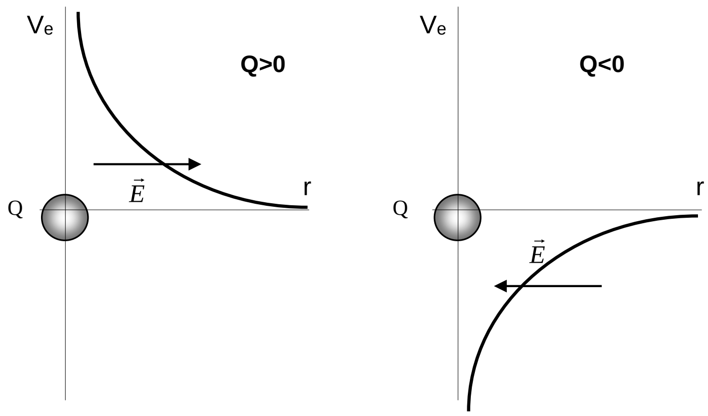
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots = \sum_i V_i = \sum_i K_0 \frac{Q_i}{r_i}$$

siendo Q_i cada una de las cargas que crean el campo y r_i la distancia desde cada una de esas cargas hasta el punto donde calculamos el campo.

5.2 Propiedades del potencial:

Observemos las características que tiene el potencial eléctrico:

- <u>**Signo de V:**</u> Si la carga que lo crea es positiva, el V es positivo y si la carga que lo crea es negativa, el potencial es negativo (a diferencia del gravitatorio, que siempre era negativo). Según eso, podemos representar el potencial creado por una carga a su alrededor en función de la distancia mediante las siguientes dos gráfica, que corresponden a cada uno de los casos citados anteriormente



- **Cálculo del trabajo:** El concepto de potencial es muy útil para calcular cual sería el trabajo que hace la fuerza eléctrica para llevar una carga q de un punto a otro dentro del campo. Asi, el W_{A-B}=E_p(A)-E_P(B), y teniendo en cuenta que la E_P=q·V, podemos escribir

$$\boldsymbol{W = E_p(A) - E_p(B) = q(V_A - V_B) = -q\Delta V}$$

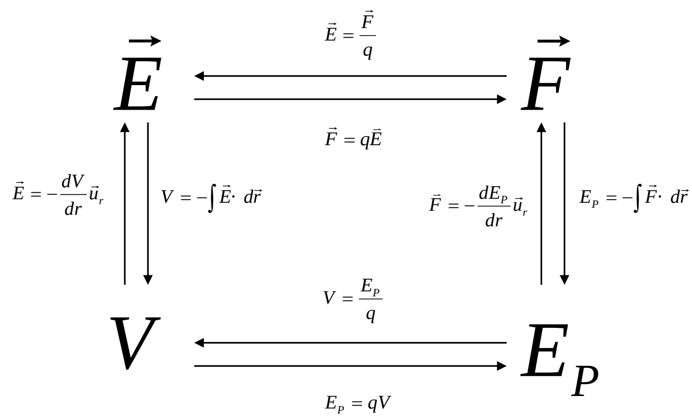
Cuando una carga es trasladada entre dos puntos de una superficie equipotencial, como V(A)=V(B), no se realiza trabajo.

De esta fórmula **se define la diferencia de potencial entre 2 puntos, como el trabajo que realiza el campo para trasladar la unidad de carga positiva entre dichos puntos.**

- **Definición de V en un punto:** Si el punto B está en el ∞, $V_B \rightarrow 0$ y $V_A = W_{AB}$ y podemos definir <u>el potencial en un punto del campo eléctrico como el trabajo que realiza el campo para trasladar la unidad de carga positiva desde dicho punto hasta el ∞</u>**. La unidad, el voltio, sería el potencial en un punto tal que el trabajo realizado para llevar la unidad de carga positiva (+1 C) desde ese punto hasta un punto muy lejano (ꝏ) es de 1 julio.**

5.3 Relación entre todas las magnitudes estudiadas aquí.

Puede ser útil que analices este esquema, que te permitirá recordar la relación que existe entre todas las magnitudes de este tema.



5.4 Relación campo y potencial eléctrico. Líneas de campo y superficies equipotenciales.

Recordando la relación que hay entre energía potencial y fuerza, podemos ver que existe la misma relación entre campo eléctrico y potencial, pues, al fin y al cabo, estos últimos son los primeros por unidad de masa. Recordando la relación vistan en el apartado anterior podemos escribir

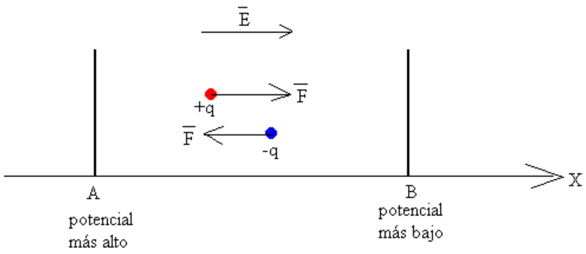
$$\vec{\boldsymbol{F}}=-\frac{d\boldsymbol{E_P}}{dr}\vec{u}_r\ o-\Delta\boldsymbol{E_p}=\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{d\vec{r}}$$

Si dividimos en ambos miembros de la igualdad por q y, como es constante, la introducimos dentro de la derivada:

$$\frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{q}=-\frac{d\left(\frac{\boldsymbol{E_P}}{q}\right)}{dr}\vec{u}_r;\vec{\boldsymbol{E}}=-\frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dr}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}\ o\ -\Delta\boldsymbol{V}=\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{d\vec{r}}$$

De esta expresión se deducen las mismas conclusiones que extrajimos de la primera, o sea, que:

- Si tenemos una gráfica de la función potencial, el valor del campo en cada punto coincidirá con menos la pendiente de la curva de potencial en dicho punto. El signo menos nos indica, como entonces, que el campo se opone al crecimiento del potencial, o dicho de otra manera, **el campo siempre apunta hacia las zonas de menor potencial**. Sale de las Q>0 y entra en las Q<0.
- **Las cargas positivas, como se mueven en sentido del campo, se mueven espontáneamente hacia *potenciales decrecientes*, mientras que las negativas, como se mueven en sentido contrario al campo, lo harán hacia *potenciales crecientes, hacia las zonas de mayor potencial*.** En ambos casos se mueven buscando los minimizar su E $_{\text{potencial}}$. Para las cargas q positivas, eso se conseguirá en los puntos de menor V (ya que E_P=qV y si q es positivo E_p es mínimo donde V lo sea), pero si la carga q es negativa, su valor menor de E_P lo alcanzará en los valores máximos de V (E_P=qV y si V es máximo, como q<0, E_P es mínimo). Llegamos a la misma conclusión que antes.

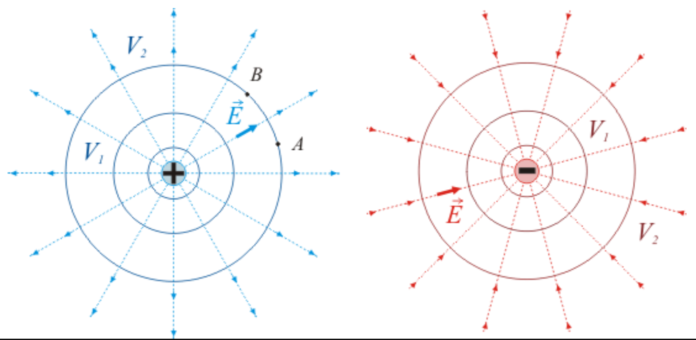


Lineas de campo: Son líneas imaginarias, tangentes en todos sus puntos al vector intensidad de campo eléctrico.

Constituyen una forma visual de representar el campo eléctrico. Se dibujan de forma que su **dirección y sentido coincidan con la dirección y sentido del campo eléctrico** (fuerza sobre la unidad de carga positiva) en cada punto. Vienen a representar el camino que seguiría una carga positiva dejada en un punto de la línea. Tienen las siguientes características:

- Nacen en las cargas positivas (manantiales) y mueren en las negativas (sumideros). El sentido de las líneas, y por tanto del campo, indica el sentido del movimiento de una carga positiva puesta en ese punto. Las cargas positivas se mueven espontáneamente hacia potenciales decrecientes (menor energía potencial), por lo que ese será el sentido de las líneas de campo

- Se dibujan con el convenio de que el nº de ellas que atraviesan la unidad de superficie colocada en un punto y perpendicularmente a ellas coincida con el campo en dicho punto.
- Las líneas de campo no pueden cortarse en ningún punto pues en si se cortasen habría en ese punto tantos valores de E (tantas tangentes) como líneas se cortaran en él. Cosa imposible pues, por la definición de campo, éste debe ser único en cada punto.
- En el caso de cargas puntuales estas líneas son radiales. En otros casos son mas complejas.



Líneas de campo y superficies equipotenciales de una carga puntual positiva y otra negativa

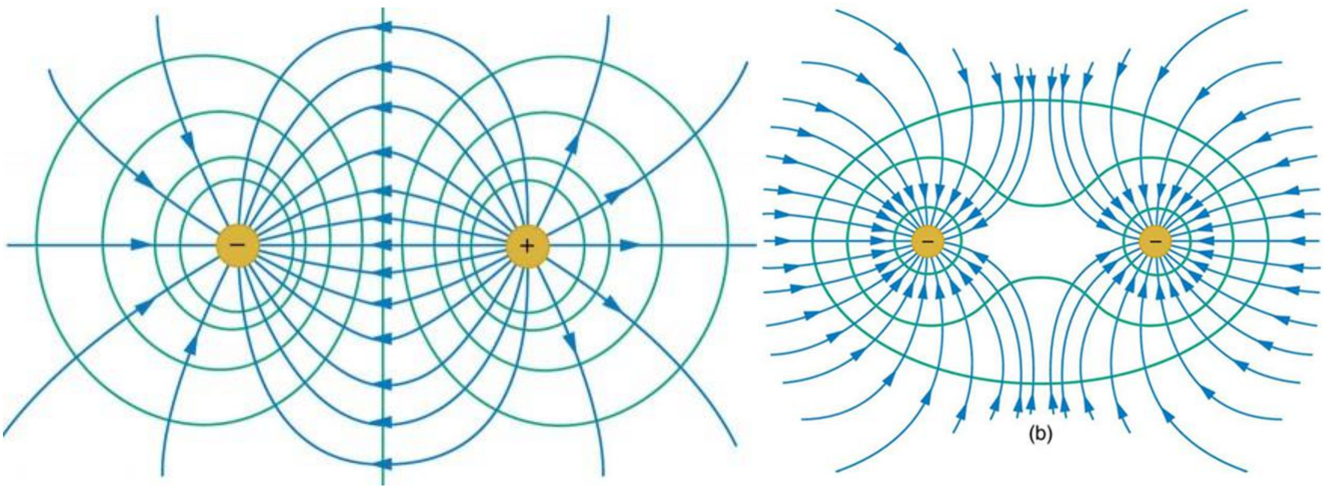
Superficies equipotenciales: son el lugar geométrico de los puntos del espacio tales que tienen el mismo valor del potencial eléctrico.

Si desplazamos una carga por un camino cualquiera (siendo $\boldsymbol{d\vec{r}}$ tangente a dicha línea) contenido en una superficie equipotencial, el camio de potencial será 0 (ΔV=0, al ser $V_A=V_B$) y por tanto la integral $\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$ debe ser 0**, lo que implica que $\vec{E}$ y $d\vec{r}$ son perpendiculares durante todo el camino.** Y como $d\vec{r}$ es tangente a las superficies equipotenciales, **$\vec{E}$ debe ser perpendicular a ellas en todo momento. Es decir:**

las líneas de campo deberán ser perpendiculares a las superficies equipotenciales.

Por tanto, las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales y llevan el sentido de los potenciales decrecientes.

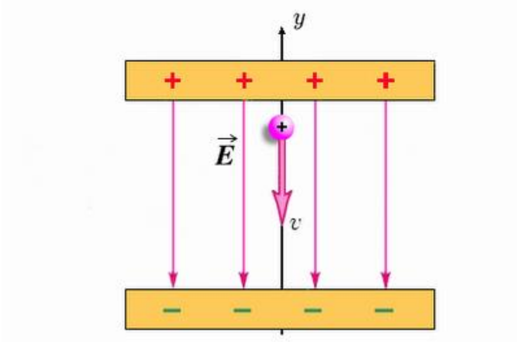
- La propiedad más importante de las superficies equipotenciales es que no pueden cortase entre si nunca, en ningún punto, pues ello equivaldría a valores distintos del potencial en el mismo punto, en contradicción con que el V debe ser único en cada punto.



líneas equipotenciales de un sistema de 2 cargas de igual y distinto signo (dipolo) y líneas de campo.

6 MOVIMIENTO DE CARGAS DENTRO DE UN CAMPO UNIFORME

Los campos creados por cargas puntuales como las vistas hasta ahora tienen un valor distinto en cada punto del espacio. Se puede conseguir que en una cierta zona del espacio el **vector campo eléctrico $\vec{E}$ sea constante o uniforme**, tenga el mismo valor en todos los puntos (igual valor de un vector es igual módulo, dirección y sentido). El dispositivo que se puede usar, como se ve en la figura, consta de 2 placas rectangulares enfrentadas entre si y cargadas con igual carga, pero de distinto signo. En la práctica se puede hacer cargando el par de placas conectándolo a una fuente de corriente continua (es un **condensador** de carga).



Cuando tenemos esa disposición de cargas el campo no se puede calcular con las expresiones anteriores (se puede hacer usando el teorema de Gauss que veremos luego). No podemos usar expresiones como $|E|=kq/r^2$, ni $V=kq/r$ (esas expresiones son para cargas puntuales). Podemos calcularlo de otro modo: Hemos comentado que las placas se cargan conectándolas a una fuente de corriente continua, como por ejemplo una pila. De estos aparatos conocemos su "voltaje", la diferencia de potencial en sus bornes (1,5 V típicamente). Podemos establecer una relación entre este valor, la V_A -V_B de la pila y el campo que se crea. Recordamos que:

$$W = \int_A^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{P_A} - E_{P_B}$$

Si dividimos en la expresión anterior en ambos miembros por q nos quedará:

$$\int_A^B \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{E_{P_A}}{q} - \frac{E_{P_B}}{q} = V_A - V_B$$

Y como el $\vec{E}$ es constante, puede salir fuera de la integral:

$$\boldsymbol{\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = V_A - V_B}$$

El campo eléctrico sería, en módulo:

$$|\boldsymbol{\vec{E}}| = \frac{|\boldsymbol{\Delta V}|}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

Siendo Δx la distancia entre las placas. Vemos que otra unidad posible para el módulo del **campo eléctrico**, además del **J/Q**, es **V/m**. El campo irá de la zona de mayor potencial (la placa positiva) a la placa negativa.

Podemos usar la expresión anterior y otras conocidas para ver cómo se movería una carga dentro de este campo uniforme. Sigue siendo cierto que una carga q dentro de esta región sentiría una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$. Como $\vec{E}$ es constante, $\vec{F}$ también lo será y la aceleración de la partícula, calculada como $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, también será constante:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

La carga, de masa m y carga q, puede moverse de 2 formas:

- Si estaba en reposo, se moverá con aceleración constante en línea recta en el sentido de la aceleración, con MRUA. Irá hacia $\vec{E}$ si q es positiva y en sentido contrario a $\vec{E}$ sí es negativa. Teniendo en cuenta que el campo siempre apunta hacia la zona de menor potencial, la carga q irá hacia potenciales decrecientes si es positiva y hacia potenciales crecientes si es negativa. Podemos calcular la velocidad final cuando viaja de una placa a otra mediante las ecuaciones del MRUA o mediante argumentos energéticos: El W eléctrico sería igual a la variación de energía cinética. Así:

$$\boldsymbol{W = q(V_A - V_B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2}$$

Con esta idea se define una nueva unidad de energía o trabajo denominada **electrón-Voltio** (abreviado **eV**), que es la **energía comunicada a un electrón cuando se mueve entre una diferencia de potencial de 1 V**. Así, 1 eV=$1{,}6\cdot10^{-19}$ C·1 V=**$1{,}6\cdot10^{-19}$ J.**

- Si la carga entra en la zona con una velocidad v perpendicular al campo, tendría un movimiento composición de 2, un MRU en el sentido inicial del movimiento y un MRUA con la aceleración calculada anteriormente (y en el sentido visto anteriormente) en el eje perpendicular a la entrada. Tendríamos un movimiento compuesto como los estudiados el curso pasado (tiro horizontal). En la imagen se ve como se movería un electrón cuando entra en dicha zona de campo uniforme.

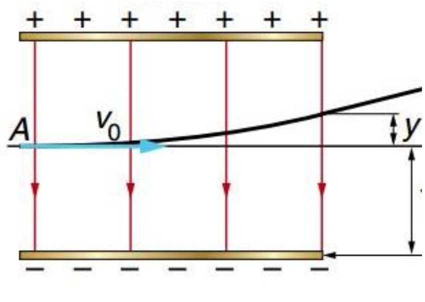
$$eje\ x: x = v_0 t$$

$$eje\ y: y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{q|\vec{E}|}{2m}t^2$$

Si conocemos la longitud de las placas, x, podemos calcular la salida y en función de x eliminando el tiempo de ambas ecuaciones.

$$t = \frac{x}{v_0}; y = \frac{q|\vec{E}|}{2m}t^2 = \frac{q|\vec{E}|}{2m} \cdot \frac{x^2}{v_0^2}; \boldsymbol{\frac{q}{m} = \frac{2v_0^2 y}{|\vec{E}|x^2}}$$

Si conocemos v_0, $|\vec{E}|$, x e y podemos hallar la relación q/m de los electrones, lo que hizo Thomson con su tubo de rayos catódicos.



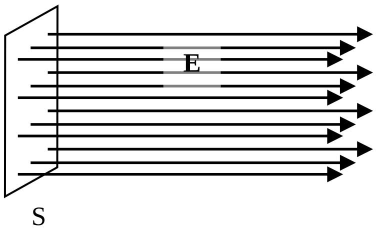
7 CONCEPTO DE FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL.

Se define el **flujo** de un campo vectorial a través de una superficie como el número de líneas de campo que atraviesan dicha superficie. Se representa mediante la letra griega **Φ** (phi) y teniendo en cuenta que los campos que hemos estudiado hasta ahora, el eléctrico y el gravitatorio, se han considerado siempre **estacionarios**, es decir, que no varían con el tiempo, el flujo de dichos campos también lo será.

Su cálculo es muy sencillo desde el punto de vista matemático si recordamos que cuando representamos un **campo vectorial** se hace el convenio de representar **un número finito de líneas de campo, de manera que el número de ellas que atraviesen la unidad de superficie colocada perpendicularmente a las mismas en cada punto coincida con el valor del campo en el centro de dicha superficie**.

Utilizando el convenio anterior, veamos como calcular el flujo de un campo empezando por el cálculo en un caso sencillo, para ir poco a poco complicándolo (como hicimos con el W en el tema anterior). Usaremos durante el tema el ejemplo del campo eléctrico, por ser para el que se utiliza más el concepto de flujo.

1. **Flujo de un campo constante a través de una superficie rectangular perpendicular.** Supongamos que deseamos calcular el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie y se cumplen los siguientes 2 requisitos:
   - Que el campo sea uniforme, es decir, que valga lo mismo en todos los puntos del espacio.
   - Que la superficie a través de la cual deseamos calcular el flujo sea plana y perpendicular al campo en todos los puntos, tal y como se indica en la siguiente figura

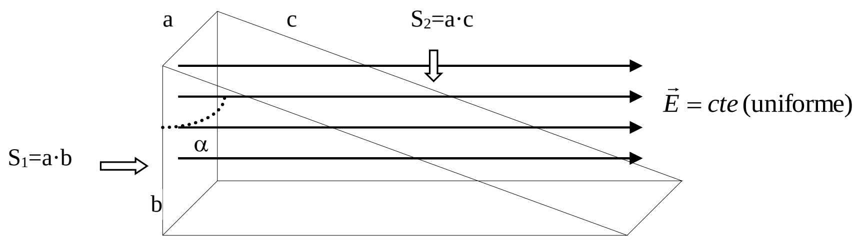


   Teniendo en cuenta que $|\vec{E}|$ representa el nº de líneas por unidad de superficie colocada perpendicularmente (condición que aquí se produce), si lo multiplicamos por S obtendremos el nº de líneas de campo que atraviesan dicha superficie, el flujo será:

$$\boldsymbol{\Phi(n^{o}\ de\ líneas) = \frac{n^{o}\ de\ líneas}{unidad\ de\ superficie} \cdot superficie = |\vec{E}| \cdot S}$$

   ecuación válida si se cumplen las dos condiciones anteriores. Sus unidades, en el sistema internacional, serán Nm^2/C, para el campo eléctrico y Nm^2/kg para el campo gravitatorio (en este último, $\boldsymbol{\Phi=|\vec{g}|\cdot S}$). Nuestro siguiente objetivo será el de intentar remover las dos suposiciones anteriormente realizadas, a fin de que podamos calcular el flujo de un campo vectorial en condiciones más realistas.

2. **Flujo de un campo constante a través de una superficie rectangular no perpendiculares.** Supongamos, en primer lugar, que la superficie fuese plana y que el campo fuese uniforme, pero que entre ellos formen un determinado ángulo α y no sean perpendiculares, como antes. Para ello dibujaremos las dos superficies siguientes, S_1 y S_2, la primera de lados a y b y la segunda de lados a (el común) y c. Teniendo en cuenta que $b=c\cdot\cos\alpha$, podemos escribir la relación entre las dos superficies:
   $S_1=a\cdot b=a\cdot c\cdot\cos\alpha=S_2\cdot\cos\alpha$
   Como todas las líneas que atraviesan la primera de las superficies S_1 también atraviesan la S_2 el flujo a través de ellas será el mismo. El flujo a través de la primera se puede calcular mediante la expresión anterior, pues se cumplen las 2 condiciones:



$$\Phi_1=|\vec{E}|\cdot S_1$$

   y como el de la segunda debe ser el mismo, pues entonces:

$$\boldsymbol{\Phi_2=\Phi_1}=|\vec{E}|\cdot S_1=|\vec{E}|\cdot S_2\cdot\cos\alpha$$

   Debemos observar que el ángulo α es el que forman las dos superficies, pero también lo podemos ver como el ángulo que forma un vector normal a la superficie S_2 con el campo. Con lo cual para calcular el flujo que atraviesa una superficie cuyo vector normal forma un ángulo α con el campo mediante la expresión:

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi(n^{o}\ de\ líneas) = |\vec{E}| \cdot S \cdot cos\alpha = \vec{E}\cdot\vec{S}}}$$

   expresión que se puede escribir de forma más compacta si definimos un vector que nos represente e la superficie, al que llamaremos **vector superficie S, que tendrá como modulo la superficie real a la que representa y como dirección y sentidos los del vector normal a la superficie**.

   Al introducir el producto escalar acabamos de dar un signo al flujo. Si consideramos una superficie cerrada y tomamos como convenio que el vector superficie, además de ser normal a la superficie, tiene como sentido hacia afuera de la superficie cerrada, pueden ocurrir 2 casos para cada línea de fuerza:

- que entre en la superficie cerrada, en cuyo caso α será un ángulo del segundo cuadrante (90<α<180º), en cuyo caso el producto escalar será $\left|\vec{E}\right| \cdot S \cdot cos\alpha < 0$, es decir, *las líneas que entran en esa superficie contribuyen al flujo con un signo -.*
- Que salga de la superficie cerrada en cuyo caso α será un ángulo del primer cuadrante (0º<α<90º), en cuyo caso el producto escalar será $\left|\vec{E}\right| \cdot S \cdot cos\alpha > 0$, es decir, *las líneas que salen de la superficie cerrada contribuyen al flujo con un signo +.*

Por lo tanto, para calcular el flujo a través de una superficie cerrada debemos tener en cuenta si entran o salen de la misma, definiendo el flujo como:

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi(n^{o}\ de\ líneas) = \sum líneas\ que\ salen - \sum lineas\ que\ entran}}$$

3. **Flujo para un campo y una superficie cualquiera**. Para calcular el flujo de un campo no uniforme a través de cualquier superficie haremos los siguiente: Dividiremos la superficie S en trozos infinitesimales, muy pequeños, hasta que no se cometa error apreciable al considerarlos planos. En estos trozos, de superficie dS (su vector superficie sería $d\vec{S}$), como son tan pequeños, podemos admitir que el campo no varía dentro de cada uno (aunque sí varía de un dS a otro, por supuesto). Según eso, el flujo que atravesaría cada pequeño dS sería un pequeño flujo dΦ, cuyo valor vendría dado por la expresión anterior (al ser E constante dentro de ese dS):

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

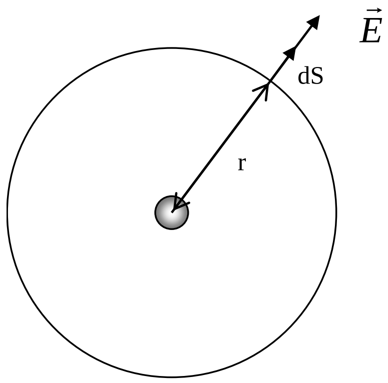
Para hallar el flujo total a través de toda la superficie debemos sumar todos los pequeños dΦ, es decir, hacer la integral de todos ellos, con lo que el flujo quedaría

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi = \int d\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}}}$$

extendiéndose la integral a toda la superficie y siendo el vector $d\vec{S}$ un vector normal a la superficie en cada uno de sus puntos cuyo sentido se toma siempre *saliendo* desde el interior de la superficie hacia el exterior. Esta es la formula más general para el cálculo del flujo de un campo vectorial, cambiando $\vec{E}$ por $\vec{g}$ si el campo es gravitatorio o por $\vec{B}$, como veremos más adelante, si el campo es magnético.

Vamos a utilizar la última expresión deducida para calcular el flujo que atraviesa una superficie esférica en cuyo centro se encuentra una carga Q que produce un campo eléctrico a su alrededor. Teniendo en cuenta que podemos dividir la superficie esférica en pequeños trozos dS cuya normal será radial y por tanto tendrán el mismo sentido que el campo en cada punto (α=0), tendremos:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \left|\vec{E}\right| \cdot dS \cdot \cos 0 = \left|\vec{E}\right| \cdot \int dS = \left|\vec{E}\right| \cdot S$$



Notese que el módulo del campo eléctrico, como tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie, es constante y puede salir fuera de la integral y que la integral de dS, extendida a toda la superficie, es S=4πr^2. Teniendo en cuenta el resultado anterior podemos escribir:

$$\boldsymbol{\Phi} = \left|\vec{E}\right| \cdot S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

donde se ha escrito el valor del campo creado por la carga en el vacio de forma racionalizada y se ha simplificado. Observese que el signo del flujo coincide que el de la carga, lo que es totalmente lógico, ya que si la carga es positiva las lineas de campo salen de ella y la salir a traves de la superficie S su flujo sería *positivo*, mientras que si la carga Q es negativa las lineas entran en la esfera para dirigirse hacia la carga y el flujo sería *negativo.*

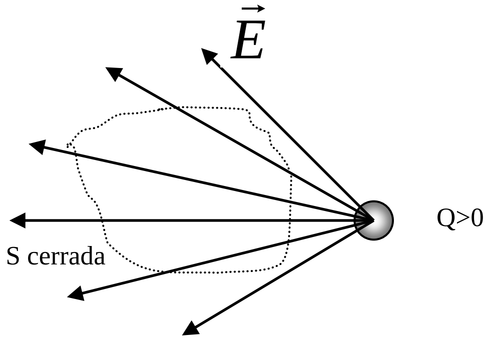
8 <u>TEOREMA DE GAUSS</u>

El resultado anterior es muy general: No cambiaría en nada si la superficie no fuese esférica (aunque sí que debe ser cerrada) o si la carga no estuviese en el centro, ya que el nº de lineas de campo que atravesarian la superficie serian las mismas. Dicho generalización es conocida en Física como **Teorema de Gauss**, en honor al matemático Friedrich Gauss (1777-1855). Su enunciado para el campo eléctrico es:

El flujo del vector campo eléctrico que atraviesa una <u>superficie cerrada cualquiera</u> es igual al la suma algebraica (teniendo en cuenta el signo) de las cargas <u>interiores</u> a dicha superficie dividido entre la constante dieléctrica del vacio.

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{\sum Q_{interior}}{\varepsilon_0}}$$

Obsérvese que el teorema anterior vale para cualquier superficie cerrada, a la que se suele denominar superficie *gaussiana*, que sólo influyen en el cálculo del flujo las cargas interiores y que el Φ de un campo eléctrico puede ser positivo, 0 o negativo (según sea $\Sigma Q_{interiores}$).



¿Le encuentras alguna explicación al hecho de que las cargas exteriores no influyan en el valor del flujo a través de una superficie cerrada? Es fácil de ver en el siguiente ejemplo, donde se han dibujado algunas líneas del campo creado por una carga positiva exterior a la superficie cerrada. Todas las líneas que entran a la superficie, por ser las líneas del campo eléctrico abiertas, deben salir de dicha superficie, por lo que se contarán, cuando entran con –1 y cuando salen con +1. En total, el flujo es igual al nº de líneas que salen - nº de líneas que entran=0.

Para el campo gravitatorio, el teorema de Gauss se enuncia de manera distinta, si tenemos en cuenta que, si tratamos de calcular el flujo del campo gravitatorio generado por una masa M que atraviesa una esfera de radio r, en cuyo centro se encuentra dicha masa M, el resultado saldrá distinto al realizado con la carga eléctrica anteriormente. En este caso, el ángulo que forman $\vec{g}$ y d$\vec{S}$ es para todos los puntos de la esfera 180°, con lo que cosα=-1 y

$$\boldsymbol{\Phi} = \int \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int |\vec{g}| \cdot dS \cdot \cos 180° = -|\vec{g}| \cdot \int dS = -\,|\vec{g}| \cdot S = -G\frac{M}{r^2}4\pi r^2 = \boldsymbol{-4\pi GM}$$

Comprobándose que sale negativo, ya que las líneas de campo siempre entran en la superficie S dirigiéndose hacia la masa M. Este resultado se puede generalizar (Teorema de Gauss para el campo gravitatorio) como:

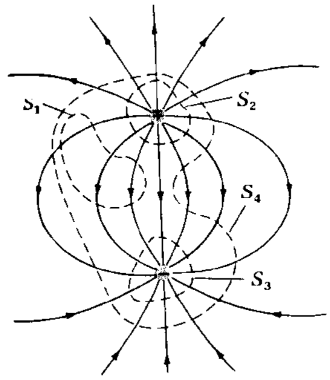
El flujo del vector campo gravitatoio que atraviesa una <u>superficie cerrada cualquiera</u> es igual al producto -4πG por la suma de las masas <u>interiores</u> a dicha superficie

$$\boldsymbol{\Phi = -4\pi G \sum M_{interiores}}$$

El teorema de Gauss se usa ampliamente para calcular el campo eléctrico o gravitatorio creado por distribuciones de carga de elevada simetría. Aquí haremos sólo un par de ejemplos.

9 EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL TEOREMA DE GAUSS:

9.1 *FLUJO DEL CAMPO ELÉCTRICO EN VARIAS SITUACIONES:*

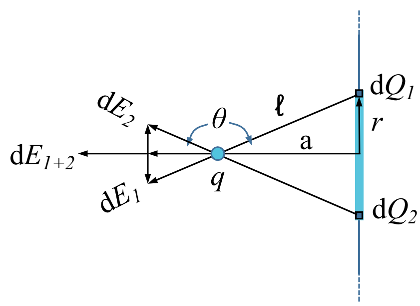


Como ejemplo de aplicación del teorema de Gauss puedes ver cuanto valdría el flujo del campo eléctrico creado por dos cargas, una positiva Q_+=+2 C y otra negativa Q_-=-2 C. Como puedes ver, el flujo a través de las superficies S_1 y S_4 es cero, aunque por motivos distintos en cada caso: en el 1º porque no hay $Q_{interiores}$ y en el 2º porque la suma de las $Q_{interiores}$ vale 0. Puedes constatar gráficamente que entran tantas líneas como salen.

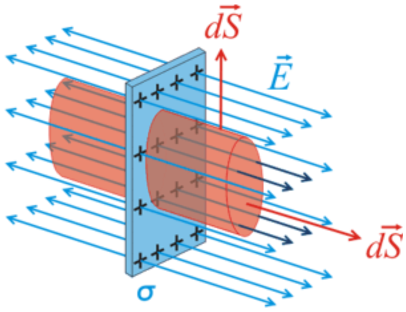
En cambio, para las superficies S_2 y S_3, el cálculo del flujo aplicando el teorema de Gauss nos da como resultado 2/ε_0 en el primer caso y -2/ε_0 en el segundo, comprobándose gráficamente que a través de la superficie S_2 todas las líneas *salen* (por eso su Φ es positivo), mientras que a través de la S_3 todas las líneas *entran* (por eso su Φ es negativo)

9.2 *CAMPO CREADO POR UN PLANO INFINITO CARGADO UNIFORMEMENTE*

Es una situación que tiene un especial interés en física porque, como veremos en el resultado, <u>es una de las maneras de conseguir un campo eléctrico uniforme</u>. De hecho, se suelen usar 2 placas paralelas (evidentemente en la práctica se usan placas finitas) cargadas con cargas de distinto signo, lo que se consigue uniendo cada placa a un polo de una pila.



Queremos calcular el campo eléctrico a una distancia a de un punto cualquiera que pertenece a un plano infinito cargado uniformemente. Dicho campo será la suma de los infinitos campos creados por cada carga superficial, y al ser la placa infinita, cada carga $\mathbf{dQ_1}$ alrededor del punto tendrá una colocada simétricamente a ella, $\mathbf{dQ_2}$, tal que la suma de sus campos sólo tendrá componente perpendicular al plano (porque se anulen las 2 componentes paralelas al campo, al ser iguales, pero de signo distinto). Como eso ocurrirá para todas las cargas dQ podemos suponer que el E total en cada punto será perpendicular al plano y sólo dependerá de a.



Con esa suposición podemos aplicar el teorema de Gauss eligiendo como superficie de integración un cilindro con centro en el punto estudiado. Descompondremos la integral en 3 suma de 3 superficies, las 2 bases (tapas) y la superficie lateral. En las bases, como el campo será constante en ellas, saldrá de la integral. En la superficie lateral, al ser E y dS perpendiculares, será 0 su producto escalar y su integral.

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{base\ 1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{base\ 2} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{sup.\ lateral} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

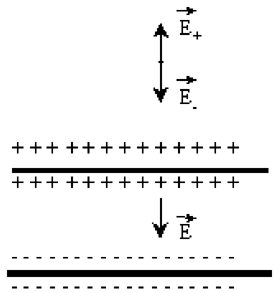
$$= |\vec{E}|\cdot \int_{base\ 1} d\vec{S} + |\vec{E}|\cdot \int_{base\ 2} d\vec{S} + 0 =$$

$$\mathbf{2|\vec{E}|S = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}}$$

Siendo S el área de la base. Definiremos un concepto auxiliar interesante, **la densidad superficial de carga, σ** (sigma) como la carga total partido por la superficie σ=Q/(Área total de la placa), por lo que para calcular $Q_{interior}$, la carga interior al cilindro, sería Q= σS. Si sustituimos en la expresión anterior y despejamos E:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 2\pi K_0 \sigma = cte$$

Vemos que el campo eléctrico es constante y que no depende de la distancia. Las líneas de fuerza serán rectas perpendiculares al plano y uniformemente espaciadas.



Si se trata de 2 placas cargadas infinitas con cargas +Q y –Q y separadas a una cierta distancia, aplicando el resultado anterior, tenemos que el campo eléctrico fuera del espacio de las 2 placas es 0, puesto que los 2 campos que producen cada una son opuestos (de igual módulo $\sigma/2\varepsilon_0$, dirección y sentidos opuestos), mientras que en el espacio entre ambas se refuerzan, haciendo que el campo total sea

$$\boldsymbol{|\vec{E}| = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = constante\ (no\ depende\ de\ r)}$$

9.3 CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UNA ESFERA CONDUCTORA

Podemos usar también el teorema de Gauss para calcular el valor del campo eléctrico en el interior y el exterior de una **esfera conductora de radio R** (**Puede ser hueca o maciza, lo importante para lo que haremos a continuación es que sea conductora**). Como sabemos, cuando existen cargas netas en una esfera conductora, como en ella se pueden mover las cargas con total libertad, debido a la repulsión eléctrica entre ellas se disponen lo más lejos posibles una de otras, es decir, en la superficie de la esfera. Por tanto, **en el interior no hay carga eléctrica**. Si elegimos como superficie gaussiana una superficie cualquiera contenida dentro de la esfera, aplicando el teorema de Gauss llegaremos a la conclusión que el flujo que la atraviesa vale 0, pues la $Q_{interior}$=0 para todas ellas. Teniendo en cuenta la expresión matemática del flujo como integral, si vale cero para todas las superficies cerradas, sólo puede ser porque el campo eléctrico vale 0 (no puede ser **E** y d**S** perpendiculares para todas las superficies gaussianas imaginables). Sin embargo, en el exterior, como $Q_{interior} \neq 0$, pues el **E**≠ 0 también. Si suponemos que, al igual que en los casos anteriores, debido a la simetría de la disposición de la carga, **E** será radial y sólo función de la distancia al centro **r** y elegimos como gaussiana (superficie de integración) una esfera de radio **r>R**, operando llegaremos a:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int |\vec{E}|\cdot dS\cdot \cos 0 = |\vec{E}|\cdot \int dS = |\vec{E}|\cdot S = |\vec{E}|\cdot 4\pi r^2 = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

de donde se deduce que $|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$, es decir, se obtiene el mismo resultado que se obtendría si la carga fuese puntual y se encontrase en el lugar que ocupa el centro de la esfera conductora.

Conociendo la relación entre el V y el **E** se puede averiguar el valor del potencial. En el interior de la esfera conductora, como **E**=0 en todos sus puntos, V (la menos integral de E) será constante (la de integración), y en el exterior, V= $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$**.** Teniendo en cuenta que la función potencial ha de ser continua, si sabemos que para el exterior vale $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ y para el interior es constante, el valor para el interior será V=$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ siendo R el radio de la esfera. Resumiendo: E y V **en esfera conductora** (maciza o hueca)

En el interior (r≤R)	En el exterior (r≥R)
E=0	E=$K\frac{Q}{r^2}$
$V = K\frac{Q}{R^2} = constante$	$V = K\frac{Q}{r}$

En esta idea se basan los dispositivos tipo **jaula de Faraday**, que consisten en rodear un objeto con un conductor (macizo o enrejillado, tipo jaula) de tal forma que en el interior no habrá campo. El interior de un vehículo es un lugar seguro ante la caída de un rayo en la chapa exterior, ya que en el interior el E=0. Evita que las ondas de microondas salgan al exterior o hace que un móvil envuelto en papel aluminio pierda su cobertura.