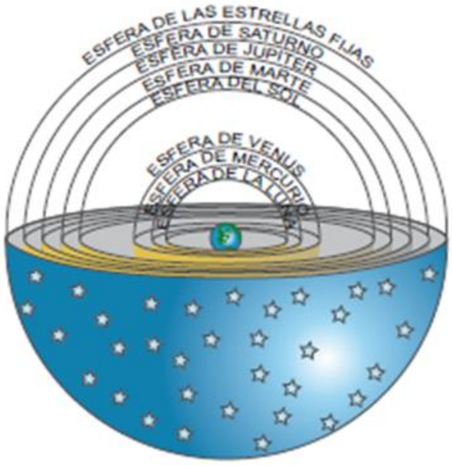
FUERZA GRAVITATORIA (TEMA 1 ANTIGUO DE EDITEX, NO ESTÁ EN EL NUEVO)

1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.

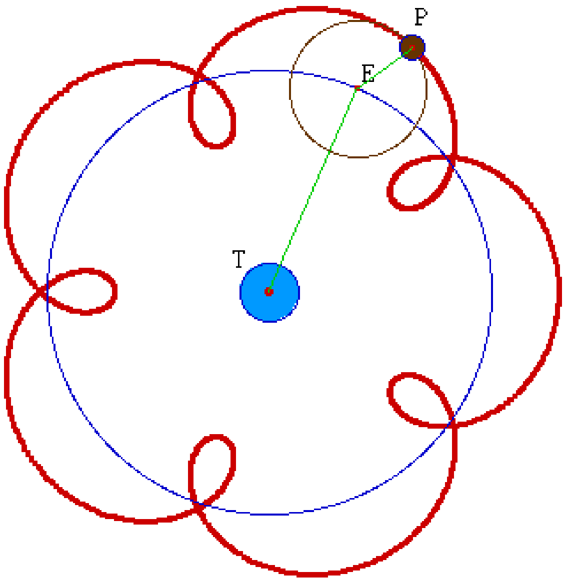
1.1 Sistema Geocéntrico



Durante la antigüedad y hasta el siglo XVI el modelo predominante que explicaba la posición de la Tierra en el Universo fue el geocéntrico. Desarrollado en el siglo IV a.C., por **Aristóteles**.

Según este modelo, la Tierra tiene la forma de una esfera, está inmóvil y ocupa el centro del Universo. Los astros se mueven en torno a la Tierra, transportados por esferas transparentes que giran con movimiento circular uniforme. A distancias crecientes se hallan las esferas que transportan a la **Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno**.

Englobando a todas y más alejada está la esfera de las estrellas. El modelo geocéntrico no explica la trayectoria aparente que siguen los planetas. En ocasiones retroceden sobre el fondo de las estrellas, para luego seguir con su camino, en una especie de bucle, en lo que se denomina el **movimiento retrógrado** (el del planeta Marte es especialmente significativo). Para explicar esta retrogradación, se propusieron 2 teoría, más elaboradas que la anterior: el sistema geocéntrico de **Tolomeo** y el de **Tycho Brahe**.



El primero, formulado por el astrónomo alejandrino **Tolomeo en el s. II d.C.**, suponía que la Tierra se encontraba inmóvil en el centro del universo y que a su alrededor giraban los planetas, incluidos el Sol y la Luna, describiendo órbitas circulares (**epiciclo**) con movimiento uniforme. El centro del epiciclo, a su vez, recorre, también con movimiento uniforme, otra circunferencia (**deferente**) alrededor de la Tierra. El movimiento global es una curva, la **epicicloide**.

Imagina que con el brazo quieto tu mano hace un círculo y a continuación pones al brazo a hacer otro circulo mayor. Eso es una epicicloide.

El éxito de Tolomeo radicó en que explicaba el movimiento retrógrado de los planetas y podía predecir con bastante exactitud sus posiciones en cualquier momento. También explicaba la diferencia observada en el brillo de los planetas, al relacionarlo con que unas veces se encuentran más cerca de la Tierra, y otras, más lejos (**Sistema Ptolemaico**, https://goo.gl/rdclsm).

El segundo modelo, formulado por el astrónomo danés Tycho Brahe (Se denomina **Sistema Tychónico**, https://goo.gl/b5HgjV) en 1577, consideraba que la Tierra se encontraba fija en el centro del universo y que alrededor de ella giraban la Luna y el Sol. Sin embargo, en este modelo los planetas no giraban alrededor de la Tierra sino que lo hacían alrededor del Sol. Es como el anterior pero el Sol ocuparía el centro de los epiciclos.

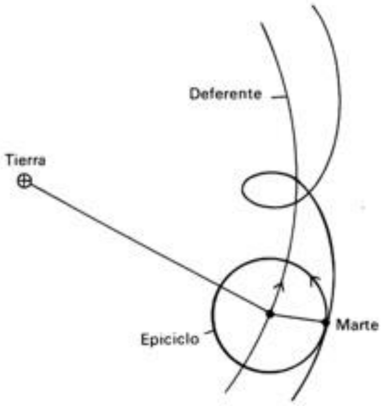
1.2 Sistema Heliocéntrico

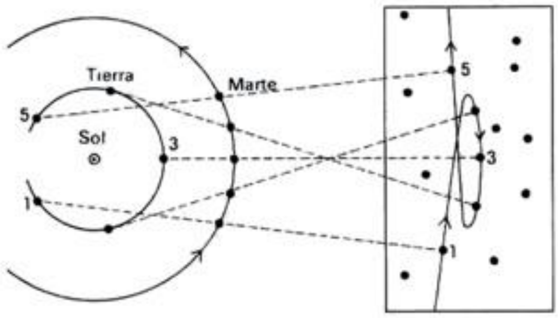
En el siglo XVI, en su libro «Sobre las revoluciones de los orbes celestes» (publicado póstumamente en 1543), el astrónomo polaco **Nicolás Copérnico** basándose en el mayor tamaño aparente del Sol y en que ilumina al resto de planetas, concibe la idea de que el Sol, y no la Tierra, es el centro del universo.

Este modelo, centrado en el Sol (**Heliocéntrico**), se apoya en los siguientes supuestos:

- El Sol está inmóvil en el centro del Universo.
- Los planetas, junto a las esferas que los transportan, giran alrededor del Sol según el siguiente orden: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno.
- La Tierra está afectada por dos movimientos importantes: uno de rotación alrededor de su propio eje y otro de traslación en torno al Sol.
- La Luna gira alrededor de la Tierra.

- La esfera de las estrellas está inmóvil y muy alejada.





El modelo explica los fenómenos de la alternancia de los días y de las noches, las estaciones, las fases de la Luna y el movimiento retrógrado de los planetas, como por ejemplo el de Marte. Marte parece que se mueven hacia atrás porque la Tierra describe una órbita de menor radio y gira más rápido alrededor del Sol, lo que hace que al observar desde ella la posición de los planetas sobre el fondo de las estrellas se produzca ese efecto visual.

Su teoría fue confirmada con posterioridad gracias a las observaciones de **Galileo** y corroborada por los cálculos de **Kepler**.

Galileo Galilei: Astrónomo y físico italiano. En 1609 transformó un anteojo fabricado en Holanda, hasta convertirlo en un auténtico telescopio, con el que observó que la Luna no era una esfera perfecta, como se deduciría de las teorías de Aristóteles, sino un lugar con montañas y cráteres. Descubrió cuatro satélites que giraban alrededor de Júpiter, poniendo en duda la afirmación de que la Tierra era el centro de todos los movimientos celestes, y reforzando la teoría heliocéntrica de Copérnico. En 1632 consiguió el *imprimatur* (permiso eclesiástico de impresión) para su obra «Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano», a pesar de lo cual fue sometido a proceso eclesiástico en 1633 por defender la teoría heliocéntrica y condenado a reclusión perpetua. Obligado a retractarse de sus creencias, se le atribuye la célebre frase «Eppur si muove» («sin embargo, se mueve)

Kepler, Johannes: Astrónomo alemán. A partir de 1600 se dedicó a la astronomía como ayudante de Tycho Brahe, a quien sucedió como astrónomo y matemático de la corte del emperador Rodolfo II, en Praga. Entre los años 1605 y 1619 basándose en los datos de las meticulosas observaciones de Tycho, formuló las tres leyes del movimiento planetario que llevan su nombre, y que permiten la exacta especificación matemática de las trayectorias descritas por los planetas.

1.3 Gravitación

La gravitación es la fuerza de atracción mutua que experimentan los cuerpos por el hecho de tener una masa determinada. La existencia de dicha fuerza fue establecida por el matemático y físico inglés **Isaac Newton**, apareciendo en su obra principal “***Philosophiae Naturalis Principia Mathematica***”, «Principios matemáticos de la filosofía natural» (1687). A partir de la ley de la gravitación universal es posible deducir las leyes de Kepler.

1.4 Teoría de la Relatividad

Einstein había publicado, en 1905, su teoría de la relatividad especial, en la que argumentaba que la velocidad a la que viaja un rayo de luz en el vacio es igual sea quien sea el observador que la mida y se mueva como se mueva. Siempre medirá c, $3 \cdot 10^8$ m/s para esa velocidad. Se llama especial porque sólo es aplicable a situaciones sin gravedad (o con ésta despreciable). El problema que le planteaba la teoría de gravitación universal a Einstein es que la propagación de éste era instantánea y según Einstein nada puede viajar más deprisa que la luz en el vacío. Te puede aclarar el problema este vídeo: https://goo.gl/RKKdpF.

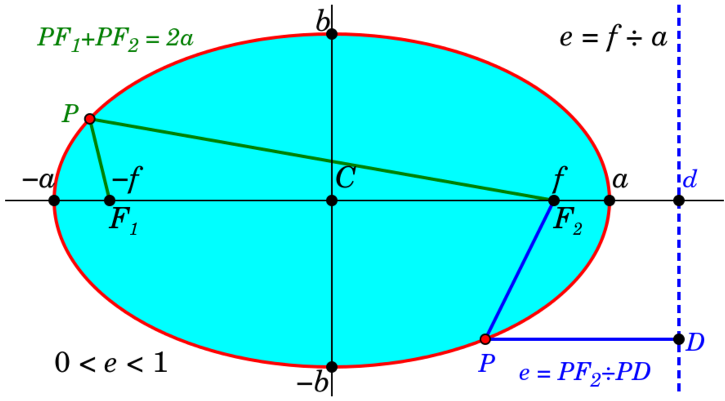
Para intentar compaginar ambas teorías, relatividad y gravitación, Einstein publicó su teoría general de la relatividad en 1915, en la que asimilaba la gravedad a una deformación o curvatura del espacio tiempo, prediciendo las ondas gravitacionales. Esta teoría permite explicar fenómenos la teoría gravitatoria de Newton no explicaba, como el movimiento del perihelio de Mercurio o la curvatura de un rayo de luz al pasar por las proximidades de una masa grande.

2 LEYES DE KEPLER

Son leyes **experimentales** (explican los datos de las observaciones de Tycho Brahe) enunciadas por J. Kepler, sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Son anteriores a la ley de Gravitación de Newton.

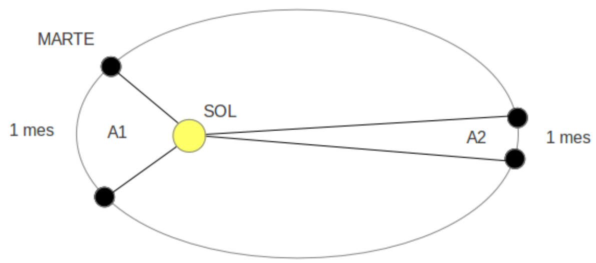
1) **1ª ley de Kepler o ley de las órbitas:** *"Todos los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se halla el Sol".*

Conviene conocer un poco más las **elipses**, que es un tipo de cónica (se obtiene al cortar un cono por un plano oblicuo que corte todas sus generatrices) que se define como "el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a 2 puntos fijos F_1 y F_2, llamados **focos**, es constante". Es decir, para todo punto P de la elipse se cumple que $d(P,F_1)+d(P,F_2)=$constante. Si situamos el centro del sistema de coordenadas en C, tenemos **el semieje mayor, a, el semieje menor, b, y la semidistancia focal, c** (f en el dibujo). Si nos fijamos en el punto (a,0), por ejemplo, podemos hallar el valor de la constante, ya que las distancias de ese punto a los focos son a-c y a+c, que sumados dan **2a**, el valor de la constante.



Se define la excentricidad o achatamiento de una elipse como el cociente entre la semidistancia focal c y el semieje mayor a: $e = \frac{c}{a}$. Si observamos el punto (0,b) y aplicamos Pitágoras a la definición de elipse nos queda: $a^2=b^2+c^2$, de donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, por lo que $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. De aquí se deduce que e está siempre comprendido entre 0 y 1 y vale 0 cuando es una circunferencia (c=0 o b=a, los dos focos son uno sólo central) y vale 1 cuando es tan alargada que es una recta (b=0).

2) **2ª ley de Kepler o ley de las Áreas:** *"el vector de posición (radiovector, $\vec{r}$) que une el centro del Sol con el centro del planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales"* (*velocidad areolar constante, la velocidad areolar la definimos como la variación del área recorrida por $\vec{r}$ con el tiempo. $v_{areolar} = \frac{dS}{dt}$*).



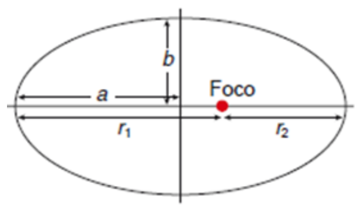
En el gráfico se ve que el área recorrido por el planeta Marte es el mismo en el mismo intervalo de tiempo (1 mes en el dibujo). Esto significa que el movimiento es más rápido en los puntos más próximos al Sol (*Perihelio: punto más próximo*). La velocidad es menor en los puntos más lejanos (*Afelio: punto más alejado*).

3) **3ª ley de Kepler o ley de los periodos de revolución:** *"El cuadrado del tiempo empleado por un planeta cualquiera en su movimiento de revolución alrededor del sol es proporcional al cubo de su distancia media al Sol"*. Podemos escribirla como:

$$T^2 = k \cdot r_{medio}^3$$

El radio medio de una órbita se define como la media entre la distancia máxima y mínima del planeta al Sol, es decir, $r_m=(r_{afelio}+ r_{perihelio})/2$).

Teniendo en cuenta las propiedades de una elipse, $r_{afelio}=a+c$ y la $r_{perihelio}=a-c$, con lo que $r_m=a$, el semieje mayor (así, $T^2=k\cdot a^3$). Por tanto, también se puede enunciar esta tercera le diciendo que el cuadrado del período de rotación es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.



Si la órbita es circular (nuestra suposición habitual) el radio medio es el radio de la órbita, $\mathbf{T^2=k\cdot r^3}$.

También la podemos escribir sin usar K, comparando 2 planetas y eliminado k por igualación, así:

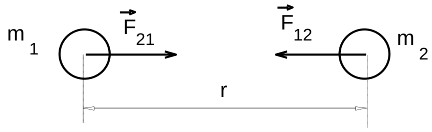
$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Las leyes de Kepler, **experimentales**, se pueden explicar a partir de la ley de Gravitación Universal propuesta por Newton, que es una propuesta **teórica**. Por eso se aceptó, porque es capaz de explicar perfectamente estas leyes de Kepler. A partir de estas leyes se habla muchas veces del ***"Universo mecánico"***, un universo desprovisto de la magia y en el que los planetas siguen una leyes estrictas y matemáticamente bien definidas.

3 LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON.

3.1 Enunciado y formulación

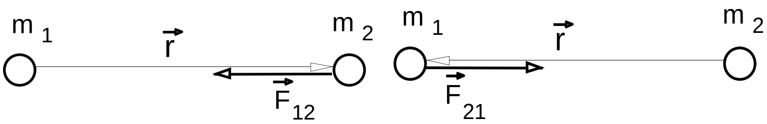
La ley formulada por Isaac Newton justifica las leyes de Kepler proponiendo la existencia de una fuerza central atractiva entre dos masas cualesquiera. **Afirma que las fuerzas de atracción mutuas que experimentan dos cuerpos dotados de masa son directamente proporcionales al producto de sus masas e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que los separa**.



$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La fuerza sobre cada partícula se puede expresar **vectorialmente** en función del vector de posición con respecto a la otra:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}\vec{u}_r$$



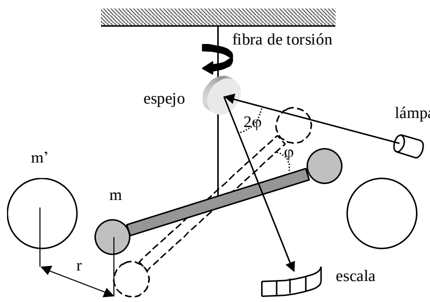
El signo – se debe a que el sentido de la fuerza es contrario al del vector de posición, ($\vec{u}_r$ es un vector unitario radial en esa dirección. Se obtiene haciendo $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$). G es la **constante de gravitación universal**.

La ecuación es válida tanto para masas puntuales como para masas que tengan simetría esférica.

3.2 La constante de Gravitación Universal

La constante G tiene un valor único para todo el Universo. Su valor fue determinado por primera vez mediante experimentos muy precisos por **Cavendish** en 1.798 (111 años después de que Newton publicara su ley): $G=6{,}673\cdot10^{-11}$ Nm²/kg².

Para ello utilizó un aparato denominado ***balanza de torsión***, tal y como se muestra en la figura siguiente. Cuando las masas m´ se colocan cerca de las masas m', su atracción gravitatoria produce el giro en la barra horizontal que da lugar a la torsión o retorcimiento del hilo un ángulo φ. Dicha torsión φ es proporcional al valor de la fuerza F (realmente es proporcional al momento de las fuerzas, pero como el brazo es constante) y se puede medir con gran precisión mediante la reflexión de un rayo reflejado en un espejo adherido al hilo.



3.3 Masa gravitacional y masa inercial

Es interesante darse cuenta que las masas que figuran en la ley de Gravitación son "**masas gravitatorias**" y que conceptualmente son distintas a las "**masas inerciales"**. Esta última es la constante de proporcionalidad entre la fuerza aplicada y la aceleración producida según la 2ª Ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$).

Conceptualmente, en la física de Newton, son distintas, pero su valor numérico es el mismo para todos los cuerpos. Este hecho no es nada evidente y tiene mucho que ver con el **"Principio de equivalencia"**, que constituye la base del **"Principio de la relatividad general"** (Einstein, 1915).

3.4 El peso de los cuerpos (P)

*Es la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo situado en su superficie.*A la luz de la Ley de Gravitación Universal el módulo de esa fuerza será:

$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

Donde M_T = masa de la Tierra ($5{,}96\cdot10^{24}$ kg) y R_T = Radio de la Tierra ($6{,}37\cdot10^{6}$ m ≈ 6.400 km). luego $G\frac{M_T}{R_T^2}$ es una constante, denominada **aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, g_{0T}.**

$$g_{0T} = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

Y entonces la fuerza gravitatoria, el Peso, será: $P=F = m\cdot g_{0T}$

El vector peso tiene por dirección la vertical, sentido hacia el centro de la Tierra y punto de aplicación el centro de gravedad del cuerpo (c.d.g.) (todo ello sin contar con la rotación de la Tierra alrededor de su eje, pues si considera este movimiento el vector $\vec{g}$ no apunta, en general, exactamente hacia su centro)

El nombre que le hemos dado a la aceleración de la gravedad, g_{oT}, es más complicado que el que le hemos dado en cursos anteriores, simplemente g, porque este curso calcularemos valores de g en otros planetas y a otras alturas distintas de 0. En ese caso general, g_{hP} sería:

$$g_{hP} = G\frac{M_P}{(R_p \ + h)^2}$$

Podría pensarse que el peso de un cuerpo calculado con la fórmula tradicional (P=9,8m) sólo sirve para puntos exclusivamente de la superficie. No es así, pues realmente se comete un error muy pequeño cuando los cuerpos están a alturas razonables. Así para un cuerpo de 1 kg que esté a una altura de 10 km, su peso real es de 9,766 N; el valor del peso calculado con la fórmula tradicional es de 9,8 N, siendo el error cometido de un 0,35%. Por eso hemos hecho problemas los cursos anteriores sin preocuparnos de este hecho. Este curso en muchos ejercicios los objetos subirán a alturas en las que g ya no será 9,8 m/s^2.

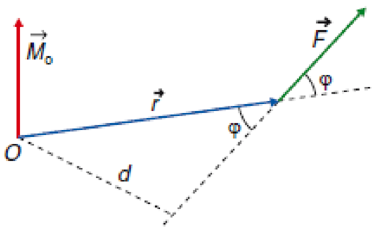
4 JUSTIFICACIÓN DE LAS LEYES DE KEPLER

4.1 *Momento de una fuerza. Momento de la resultante de todas las fuerzas. $\overrightarrow{M_o}$.*

La magnitud característica del movimiento de traslación de una partícula, en un sistema de referencia, es su cantidad de movimiento o momento lineal: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. (recuerda. Es un vector m veces mas largo que v, va en su misma dirección y sentido y su módulo tiene de unidades kg·m/s en el S.I.). Su variación respecto del tiempo constituye la **segunda ley de Newton**, que permite hallar la fuerza resultante que actúa sobre una partícula de masa constante.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

(Escribimos sólo $\vec{F}$ por simplificar, pero en realidad es la resultante de todas las fuerzas, $\sum \vec{F}$). Para caracterizar el efecto giratorio de las fuerzas sobre los objetos se define la magnitud vectorial **momento de una fuerza respecto de un punto O**, que es igual al **producto vectorial del radio vector $\vec{r}$ por la fuerza $\vec{F}$**:



$$\overrightarrow{M_o} = \vec{r} \times \vec{F}$$

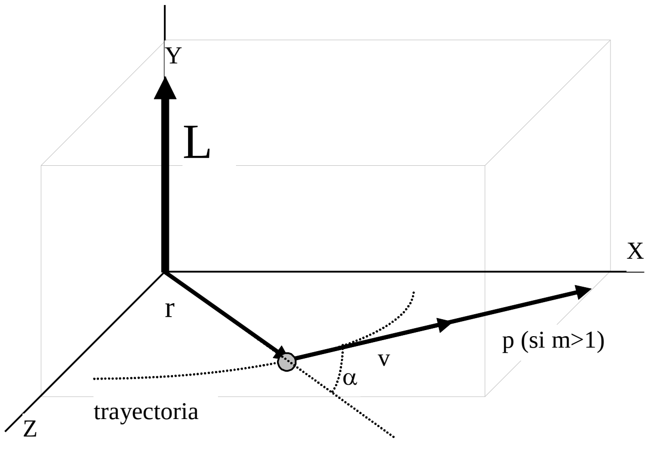
Su módulo es: $|\overrightarrow{M_o}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\varphi = d \cdot |\vec{F}|$. Su unidad S.I. es N·m.

El vector momento de una fuerza respecto de un punto <u>es independiente de la posición en que se encuentre ese vector fuerza en su recta directriz</u>, siempre que no cambie su sentido. (no lo demostraremos, pero es sencillo de hacer).

Si sobre un objeto actúan un conjunto de fuerzas, entonces el momento de la fuerza resultante respecto de un punto es igual a la suma de los momentos de cada una de las fuerzas respecto del mismo punto.

4.2 *Momento angular de una partícula, $\overrightarrow{L_o}$.*

Para describir, con mayor detalle, el movimiento curvilíneo de una partícula se define una nueva magnitud denominada **momento angular**, llamada también momento cinético o momento de la cantidad de movimiento.



Se define el **momento angular de una partícula de masa m respecto de un punto O** como el **producto vectorial del radio vector $\vec{r}$ que va del punto O a la partícula** (sería el vector posición de la partícula si O es el origen de coordenadas) **por el vector cantidad de movimiento de la partícula**, $\vec{p} = m\vec{v}$.

$$\overrightarrow{L_o} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$$

Si tomamos en el siguiente esquema el punto O como origen de coordenadas y suponemos, para facilitar la visualización, que la partícula se desplaza en el plano XZ, se ve la representación del vector $\overset{\omega}{\mathrm{L}}$

Características de $\overrightarrow{L_o}$

- **Módulo:** $|\overrightarrow{L_o}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$. su unidad, en el S.I. será el kg·m^2/s
- **Dirección:** perpendicular al plano formado por el vector velocidad y la posición y, por lo tanto, perpendicular al plano de la trayectoria. (en nuestro ejemplo, sólo tendría componente Z)

Si la trayectoria de la partícula está contenida en un plano y el origen del sistema de referencia O está contenido en ese plano, entonces el vector momento angular es siempre perpendicular a dicho plano. El momento angular depende del punto respecto del que se determina.

Esta magnitud desempeña en rotación el mismo papel que la cantidad de movimiento en el movimiento de traslación.

4.3 Variación de $\vec{L}$ con el tiempo. Teorema fundamental de la rotación.

A medida que el cuerpo se mueve, su vector cantidad de movimiento y su vector posición cambiarán y por tanto es lógico que cambie su producto vectorial, es decir, $\vec{L}$. Para estudiar como varia $\vec{L}$ con el tiempo, lo mejor es derivarlo con respecto a él. (Para derivar un producto vectorial se siguen la misma regla que con uno entre funciones: derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera por la derivada de la segunda, con la salvedad de que ambos productos son vectoriales).

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

El primero de los 2 sumandos contiene la derivada de la posición frente al tiempo, que es la velocidad instantánea**, $\vec{v}$**. En el segundo sumando contiene la derivada de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo, que según la segunda ley de Newton coincide con la suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula (la resultante de todas ellas). Si hacemos estas sustituciones obtendremos

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times (\sum \overrightarrow{F})$$

Expresión que puede simplificarse aún más si nos damos cuenta que $\vec{v}$ y $\vec{p}$ son siempre vectores paralelos ($\vec{p} = m \cdot \vec{v}$), con lo que su producto vectorial será 0 (α=0). La conclusión de toda esta demostración es la siguiente:

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{L_o}}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \sum \vec{\boldsymbol{F}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M_o}}}$$

El segundo término es el momento de la fuerza resultante aplicada con respecto al mismo punto y se le denomina $\overrightarrow{M_0}\,(\vec{R})$, siendo $\vec{\boldsymbol{R}} = \sum \vec{\boldsymbol{F}}$ la suma de todas las fuerzas, la fuerza resultante.

Lo demostrado anteriormente se puede enunciar diciendo que "**la variación del momento angular de una partícula con el tiempo (con respecto a un punto) es igual al momento de la resultante que actúa sobre ella (con respecto al mismo punto)**"

4.4 Conservación del momento angular. Fuerzas centrales

La ecuación anterior tiene un caso muy interesante cuando $\vec{M}$ es 0, ya que que entonces $\vec{L}$ será constante (principio de conservación de $\vec{L}$). Si sobre un cuerpo actúa una sola fuerza, para que su momento sea cero ($\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$) debe ocurrir alguno de estos 3 supuestos:

- que $\vec{F}$ sea 0, en cuyo caso el cuerpo permanecería en reposo o con velocidad constante (1ª ley Newton). <u>Una partícula libre</u> sobre la que no actuase ninguna fuerza (o la suma sea 0) tiene momento angular constante con respecto a cualquier punto del espacio, ya que $\vec{M}$ =0.
- que $\vec{r}$=0. Caso nada interesante, ya que si la partícula permanece siempre en ese origen no nos interesa.
- que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ sean <u>siempre paralelos o antiparalelos</u> (α=0º o 180º). La dirección de la fuerza siempre debe pasar siempre por un punto, al que tomaremos como origen O para calcular $\vec{L}$ y $\vec{M}$. Esas son las fuerzas centrales.

Una **fuerza es central** cuando la <u>dirección del vector fuerza pasa por un punto fijo</u>, denominado **centro de fuerzas**, O, y su <u>módulo es función solamente de la distancia desde el centro de fuerzas a la partícula considerada</u>.

$$\vec{F} = F(r) \cdot \overrightarrow{u_r}$$

El vector $\overrightarrow{u_r}$ es un vector unitario en la dirección radial a partir del centro de fuerzas. La interacción gravitatoria es una fuerza central.

Si una partícula se mueve por la acción de una fuerza central, su momento angular con respecto del centro de fuerzas permanece constante, ya que el vector fuerza y el vector de posición de la partícula respecto de dicho punto son paralelos. Acabamos de estudiar que: "**cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza central, su momento angular $\vec{L}$ con respecto al centro de fuerza permanece constante**"

Ejemplos de situaciones con fuerzas centrales los encontramos en el modelo atómico de Bohr o en el movimiento de los planetas alrededor del sol.

4.5 Consecuencias del principio de conservación del momento angular

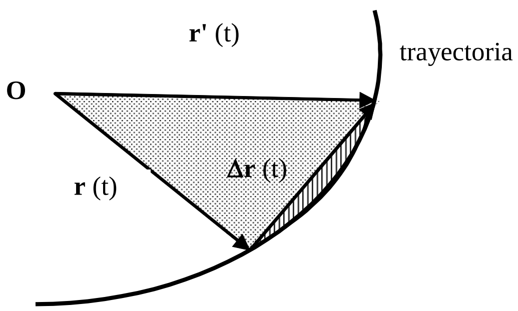
Cuando una partícula conserva constante su momento angular, sea por el motivo que sea, su movimiento debe estar sujeto a unas reglas muy estrictas que vienen marcadas por la propia necesidad de que $\vec{L}$ sea constante.

- Para que $\vec{L}$ sea constante en dirección, como es perpendicular al plano de la trayectoria, formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, por la definición de producto vectorial, este plano no puede cambiar, lo cual nos lleva a decir que el movimiento **debe ser de trayectoria plana**.
- Como $\vec{L}$ debe tener siempre el mismo sentido para ser constante y éste viene dado por la regla de la mano derecha aplicada entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$, el cuerpo no puede cambiar de sentido del movimiento. Si la partícula está girando, siempre debe **girar en el mismo sentido**.

ESTAS 2 IDEAS ANTERIORES SON LA "DEMOSTRACIÓN" DE LA 1ª LEY DE KEPLER.VEAMOS LA 2º:

- $\vec{L}$ debe ser constante en módulo. Podemos demostrar que esta necesidad conduce a que el cuerpo, en su movimiento, cumpla la **Ley de las áreas** de Kepler, enunciada anteriormente y que afirmaba que el radio vector que une el Sol con un planeta tiene *velocidad areolar constante*, $\frac{dS}{dt} = cte$.

Demostración:



La figura lateral representa a un cuerpo (se toma el origen O en el centro de fuerza) que sigue la trayectoria marcada y los vectores de posición $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ en 2 instantes de tiempo distintos, t y t´, siendo el intervalo de tiempo Δt=t´-t. El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ se define como $\vec{r}' - \vec{r}$ y es el que va desde la punta del 1º a la del 2º. El **área recorrida por el radio vector**, a la que llamaremos **ΔS**, sería el **área total de la figura**, **que es la suma del área del triángulo** cuyos lados son $\vec{r}$, $\vec{r}'$ y $\Delta\vec{r}$ (el área punteada, a la que llamaremos **ΔA**) más el área rayada.

Podemos escribir que **ΔS=ΔA + área rayada**. A medida que el intervalo de tiempo Δt se hace más pequeño (tiende a 0), el área rayada se hará más pequeña y ΔS será igual a ΔA en ese límite (tienden a parecerse).

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta S = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta A$$

El área del triángulo punteado ΔA se puede calcular, teniendo en cuenta la interpretación del módulo de un producto vectorial, como $\Delta A = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$. Al sustituir nos quedaría:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta S = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{2}|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$

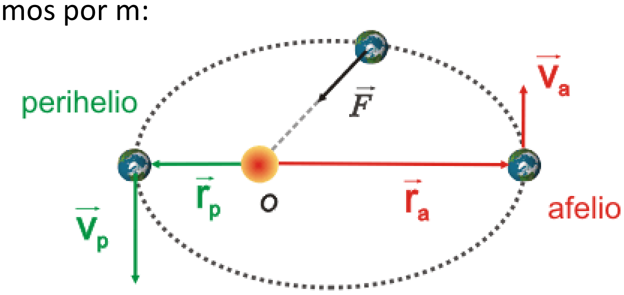
Si dividimos los 2 miembros de la ecuación por Δt y usamos el concepto de derivada nos queda:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|; \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|$$

Para que el segundo miembro sea $|\vec{L}|$, lo multiplicamos y dividimos por m:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{|\vec{L}|}{2m};$$

$$\boldsymbol{\frac{dS}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m}}$$



Si admitimos que $|\vec{L}|$=cte, $\frac{dS}{dt}$ también será constante, es decir, el nº de m^2 que el radio vector recorre por s será constante.

También podemos aplicar la constancia del $|\vec{L}|$ para comparar las velocidades de un planeta (o cualquier objeto que se mueva en órbita elíptica por acción de una fuerza central) en los puntos especiales afelio y perihelio.

Tanto en el afelio como en le perihelio, $|\vec{L_o}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}|$ ya que sólo en esos 2 momentos v y r son perpendiculares. Como $\vec{M} = 0, \vec{L} = cte$ y $|\vec{L}| = cte$ también, por lo que $\boldsymbol{r_A m v_A = r_P m v_P}$ (m, en este caso, es la masa de la Tierra). Como $r_P < r_A$, deducimos que $v_P > v_A$. (Ya visto en la **2ª ley de Kepler**)

4.6 Demostración de la 3º Ley de Kepler. Comprobación de la validez de la ley de Newton.

Sobre los planetas solamente actúa la fuerza de interacción gravitatoria debida al Sol. Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita como circular, se tiene que

$$\vec{F} = m_{planeta} \cdot \overrightarrow{a_n} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_{Sol} \cdot m_{planeta}}{r^2} = m_{planeta} \cdot \frac{v_{planeta}^2}{r} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_{Sol}}{r} = v_{planeta}^2$$

La relación entre la velocidad y el período es:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Sustituyendo se tiene

$$G \cdot \frac{M_{Sol}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_{Sol}} = constante$$

El valor de la constante sólo depende de la masa del Sol y es independiente de la masa de los planetas.

LECCIÓN 2 DEL TEXTO ANTIGUO (1 DEL NUEVO): CAMPO GRAVITATORIO

1 CAMPOS VECTORIALES: CAMPO GRAVITATORIO

El concepto físico de campo fue introducido por el Inglés **Michael Faraday** (1791-1867) para dar una imagen visualizable de la acción a distancia de las fuerzas. Faraday consideraba que la "acción a distancia" entre los cuerpos no tenía sentido físico y tenía que existir "algo" que empujaba a los cuerpos. Ese "algo" es lo que llamó "Campo". Las fuerzas entre dos objetos separados se interpretaban como resultado de la interacción entre el cuerpo y el campo en el que está inmerso (producido por el otro cuerpo). El concepto de "Campo" implica un cambio en la manera de entender el mecanismo de una interacción física: supondremos, en primer lugar, que una o varias partículas "perturban" el espacio que les rodea, bien por tener carga eléctrica, masa o momento magnético. Se ha creado el campo. Si a continuación introducimos en esa región del espacio otra partícula con la misma propiedad (es decir, con carga, masa o momento magnético), entonces sentirá la fuerza del campo creado anteriormente, Aunque en un principio el concepto de campo era, tal y como se ha contado aquí, un simple modelo para el estudio de la acción a distancia, hoy la física relativista ha dotado a dicho concepto de una entidad real.

Decimos que hay un **campo** en una región del espacio cuando existe una magnitud física que toma un **valor único** en cada punto de dicha región. A dicha magnitud se la denomina **intensidad de campo** (la tendencia actual, que seguiremos aquí, es denominar campo tanto a la región del espacio como a la magnitud misma).

En Física existen múltiples campos, que se pueden clasificar en 2 grandes grupos: Escalares (si la magnitud física asociada a cada punto es un escalar, como por ejemplo, el campo de temperaturas existente en una habitación o el campo de presiones que todos los días se observa en las noticias de TV) o vectoriales (como puede ser el campo de velocidades de las partículas de un líquido que fluye por una tubería o los campos que estudiaremos en este tema). Los campos escalares se suelen representar mediante las denominadas **superficies de nivel (o curvas de nivel, si estamos en 2 dimensiones), que son el lugar geométrico de los puntos del espacio (o del plano, en 2D) en los cuales la magnitud física tiene el mismo valor**. Dichas superficies pueden recibir nombres especiales dependiendo del campo: Isotermas (campo de temperaturas), isóbaras (campo de presión), etc.

De entre los campos vectoriales existentes en Física, cabe destacar aquellos que están de una u otra manera relacionados con alguna fuerza. A estos campos se les denominada campos de fuerza y los más importantes son el **campo gravitatorio, el campo eléctrico y el magnético** (este último, al no ser ni central ni conservativo, se estudia aparte).

El campo gravitatorio es un campo vectorial que se define para cada punto del espacio como la fuerza gravitatoria por unidad de masa situada en ese punto del espacio. Se le designa por la letra g

DEFINICIÓN DE CAMPO EN FUNCIÓN DE LA MASA QUE SUFRE EL CAMPO (m): $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$

Si el campo lo crease una sola masa M, podríamos sustituir el valor de F uy obtener el campo en función de la masa que lo crea

DEFINICIÓN DE CAMPO EN FUNCIÓN DE LA MASA QUE LO CREA (M): $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$

Es interesante comprobar que el campo gravitatorio así definido tiene un valor único en cada punto del espacio. Por ej, si en un punto cualquiera colocamos una masa de valor 2m, la fuerza que sentirá será 2F, siendo F la fuerza que sentía en dicho punto la masa m, con lo que al dividir fuerza/masa, tendrán los dos casos idéntico cociente. En el sistema internacional se expresa en N/Kg (o m/s^2)

1.1 Campo gravitatorio cerca de la Tierra

Vemos que esta definición de campo coincide con lo que hasta ahora habíamos llamado aceleración de la gravedad, g. De hecho hemos empleado la misma nomenclatura.

Si nos referimos al campo gravitatorio en la superficie terrestre:
$\vec{g}_{0T} = -G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}_r$. Su módulo sería $\vec{g}_{0T} = g_{0T} = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8\frac{N}{Kg^2}\ o\ 9{,}8\frac{m}{s^2}$. En diversas ocasiones se hace uso de la igualdad: $g_{0T}\cdot R_T^2 = G\cdot M_T$.

(En esta última expresión, teniendo en cuenta que conocemos g_0=9,8 m/s^2, R_T=6,37·10^6 m y G=6,673·10^{-11} Nm^2/kg^2, podemos calcular cuál es la masa de la tierra M_T=5,98·10^{24} kg .El artículo en el que Cavendish publicó su valor de G se llamaba "pesando la tierra". Su valor de G era la única magnitud desconocida en la ecuación anterior. Con su pequeña balanza, el científico fue capaz de calcular la masa terrestre).

Si conocemos el campo en un punto, podemos calcular la fuerza sobre una masa m colocada en dicho punto con nuestra familiar ecuación $\vec{F} = m\vec{g}$

1.2 Principio de Superposición

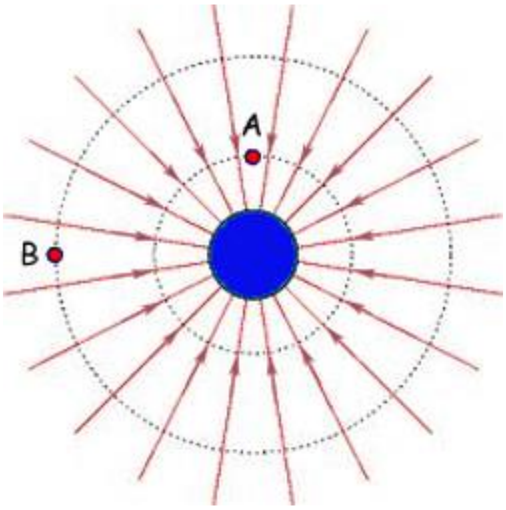
El principio de superposición afirma que cuando en un punto del espacio actúan dos o más campos , el campo resultante se obtiene sumando vectorialmente los campos que actúan. Esto equivale a decir que los campos son independientes entre sí, o sea, no se modifican mutuamente, sino que se acumulan.
Si en un punto situamos una masa m y se ve sometida a la acción de diversas masas M_1, M_2, etc. La fuerza total sobre m será la suma de las fuerzas F_{1m}, F_{2m}, etc y g será:

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_{1m}+\vec{F}_{2m}+\cdots}{m} = \frac{\vec{F}_{1m}}{m} + \frac{\vec{F}_{2m}}{m} + \cdots = \vec{\boldsymbol{g}}_{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{g}}_{\mathbf{2}} + \cdots$$

El campo en un punto sería la suma vectorial de los campos que cada masa M_1, M_2, … crearían en ese punto si estuviesen solas. El campo que crearía cada masa se puede calcular como $-\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{r}^2}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$ quedando el campo total: $\vec{\boldsymbol{g}} = -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M_1}}{\boldsymbol{r_1^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r1}} + -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{M_2}}{\boldsymbol{r_2^2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r2}} + \cdots$

Representación del campo gravitatorio

La representación de un campo vectorial se hace mediante las líneas de campo (también llamadas líneas de fuerza), **que tienen la característica de ser tangentes al vector campo en cada punto y de su mismo sentido**. Las líneas de campo se dibujan más juntas en zonas donde el campo es más intenso y más separadas en zonas de menor intensidad (menor módulo). **Las líneas de campo no se cortan unas a otras en ningún punto del espacio** (salvo donde esté situado el centro de una masa), **ya que de hacerlo existirían dos tangentes distintas en el punto de corte, una para cada línea de campo, y por tanto dos posibles valores del campo, en contradicción con la definición de campo vista anteriormente (un valor para cada punto)**. En la figura adjunta se da la representación del campo gravitatorio en las proximidades de la Tierra. Si las líneas de campo son tangentes al campo, **el vector intensidad de campo es a su vez tangente a las líneas de campo**.



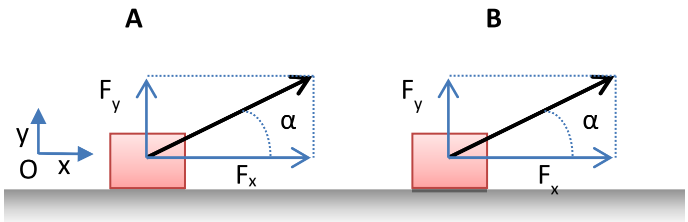
Se podrían pintar un nº infinito de líneas de campo, pero se acuerda pintar un número tal que **el nº de ellas que atraviesen la unidad de superficie colocada perpendicularmente al campo en un punto coincida con el valor del campo en dicho punto**. Esto no debe preocuparnos ahora y se usará más adelante, cuando veamos el cálculo del flujo de un campo vectorial.

2 <u>TRABAJO Y ENERGÍA.</u>

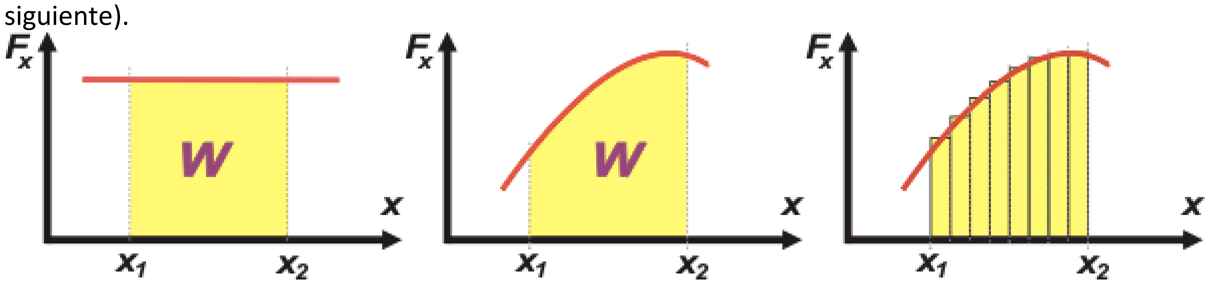
2.1 Definición de trabajo.

Como en cursos anteriores vamos a ir refinando nuestra definición de W según eliminamos restricciones.

- La definición más sencilla para el W, válida si $\vec{\boldsymbol{F}}$ **es cte y paralela al desplazamiento Δx** (o Δs o Δl), es **W=F·Δx.** Esta fórmula tan sencilla ya nos permite definir la unidad de trabajo del S.I. como el Julio (Joule, J), definido como el trabajo realizado por una fuerza de 1 N cuando actúa a lo largo de 1 m en su misma dirección y sentido.
- Si la **fuerza es constante, pero forma un determinado ángulo con el desplazamiento $\Delta\vec{r}$**,
$$W = F_x\Delta x = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\,cos\alpha = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$
Donde hemos usados $\Delta\vec{r}$ para describir el camino recorrido por el móvil entre la posición A y B, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. En otros textos (el de editex, por ejemplo) al desplazamiento $\Delta\vec{r}$ se le designa por $\Delta\vec{l}$.



- **Si la fuerza no es constante** podemos hacer un aproximación: podemos dividir el intervalo A-B en trozos tan pequeños como queramos, de tal forma que esos trozos pequeños, de longitud $d\vec{r}$ (se lee "diferencial de r" y representa un desplazamiento tan pequeño como queramos, según esa partición que hemos hecho) la fuerza se pueda considerar constante, tal que el trabajo, muy pequeño, dW (diferencial de trabajo), se pueda calcular con la expresión anterior $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. El trabajo total se calcularía ahora mediante la suma de esos diferenciales de trabajo, y ese sumatorio muy grande (tanto como partes hallamos hecho) de trabajos muy pequeños dW es lo que en matemáticas se conoce como **integral definida**, que se correspondería, como vemos en la gráfica inferior, con el área bajo la curva F-x (en el caso de una fuerza unidimensional). Vemos que esa interpretación geométrica coincide con la primera definición de trabajo cuando F era constante, $F=F_x$, W=, $F_x \cdot \Delta x$, que se corresponde con el área del rectángulo comprendida entre F_x y el eje x, entre la posición A de partida y la B (o x_1 y x_2 como en la figura siguiente).



Si la componente F_x fuese variable, la representación sería como la siguientes figuras, pero podemos interpretar que el trabajo será, al igual que antes, el área, que sabemos que en matemáticas tiene la forma de integral definida (El signo de integral es una S muy alta, símbolo de la suma de todas las "áreas infinitesimales" del tipo $F_X \cdot dx$ contenidas bajo la curva). Así, la definición de trabajo será:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Esta última definición **incluye a las 2 anteriores como casos particulares y es la definición más analítica de W, aunque cuando la fuerza sea constante usaremos una de las 2 anteriores**.

Para calcular el **W_{total} o W_{neto} realizado sobre un cuerpo**, podemos hallar la resultante de todas las fuerzas y a partir de ahí el W o bien los W individuales de cada fuerza y luego sumarlos. Es fácil demostrar que:

$$W_{neto} = \int_A^B \sum \vec{F_i} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \overrightarrow{(F_1 + F_2 + F_3 + \cdots)} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \vec{F_1} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \vec{F_2} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \vec{F_3} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots = \int_A^B \vec{F_1} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_A^B \vec{F_2} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_A^B \vec{F_3} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots = \sum W_i$$

2.2 Nota matemática sobre las integrales:

Ya las estudiarás en matemáticas. Por el momento lo que debes saber sobre ellas es su símbolo, que la integral que hemos escrito antes, denominada **integral definida** (entre los límites de integración A y B) representa el área bajo la curva F_X-x y que las integrales, en esta caso las **integrales indefinidas** (las que no tienen límites de integración) están relacionadas con la derivada. De hecho, son operaciones inversas. Si tenemos una función f(x), la función que se obtiene al integrarla, denominada **función primitiva** F(x), $F(x) = \int f(x)dx$ es tal que su derivada coindice con f(x), o sea, $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Es decir, como son operaciones inversas, la integral de una función obtenida por derivación de otra me da la función original, $\int f'(x)dx = f(x)$ (más una constante, k, llamada constante de integración, que aparece porque al derivar (f(x)+k) se obtiene f´(x)). La primitiva de f´(x) es F(x)=f(x)+k. Es decir:

$$F(x) = \int f'(x)dx = f(x) + k$$

Es decir, si la derivada de x^2 es 2x, la $\int 2xdx = x^2 + k$. Esta es la **integral indefinida**, sin límites de integración. Algunas integrales sencillas son (las puedes comprobar derivando la función primitiva obtenida):

$$\int dx = x + k; \int xdx = \frac{x^2}{2} + k; \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k\ ; \int \boldsymbol{ax^n dx} = \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{k};$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + k = -\frac{1}{x} + k$$

Esta última la usaremos varias veces.

Si la **integral es definida**, es decir, tiene límites inferior y superior de integración, se aplica la **regla de Barrow**, que dice que:

$$\int_A^B f(x)dx = F(B) - F(A)$$

Siendo F(x) la primitiva de f(x), ahora sin constante (ya que la restar la constante desaparece). Esta integral ya representa el área bajo la curva f(x) entre A y B.

2.3 Teorema de las fuerzas vivas

Recordamos también el **teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética**: **El trabajo total realizado sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética**, es decir

$$W = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

La demostración es muy sencilla ahora que contamos con el instrumento poderoso de las integrales.

$$W_{neto} = \int_A^B \sum \vec{F_i} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B m\vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_A^B md\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{dt} = \int_A^B md\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_A^B m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_A^B m|\overrightarrow{v}| \cdot d|\overrightarrow{v}| = \frac{1}{2}m|\vec{v}|_B^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}|_A^2$$

No olvides que la energía cinética es el **almacén del trabajo. Todo el trabajo que se hace sobre un cuerpo se invierte en variar su energía cinética.**

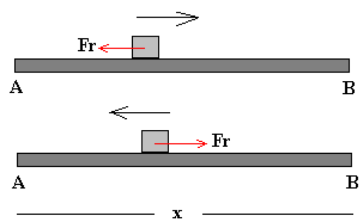
3 FUERZAS CONSERVATIVAS

Recordemos también la definición de **fuerza conservativa**:

- Una fuerza es conservativa cuando **el trabajo realizado por ella** sobre un cuerpo que se desplaza de A a B **no depende del camino seguido, sino sólo de las posiciones inicial y final**.
- Se puede definir también, de acuerdo con lo anterior, como **aquella cuyo trabajo al hacer un camino cerrado cualquiera es nulo**. Es evidente que si el W no depende del camino (conservativa) y terminamos y empezamos en el mismo punto, como el W sólo depende de la posición inicial y final y ambas son la misma, será cero, independientemente del camino cerrado elegido.

Ahora veremos que la fuerza gravitatoria, eléctrica y elástica son conservativas.

Una fuerza **no conservativa** será aquella para la cual el **W que realiza cuando actúa** sobre un cuerpo que se desplaza de A a B **depende del camino que sigue el cuerpo**. Para hallar dicho W **no sólo debemos conocer A y B, sino también por donde ha ido el cuerpo, su trayectoria**. Ejemplos de fuerzas no conservativas: el rozamiento, la fuerza de unos motores a reacción, etc. Luego veremos que es muy fácil diferenciarlas. La fuerza de rozamiento entre sólidos, de valor máximo μN, podemos demostrar que no es conservativa eligiendo un camino cerrado tan sencillo como ir en línea recta de A a B y luego desandar el camino de B a A. En lo siguiente AB es la longitud del camino AB=BA.



El W_{AB}= F_r·(AB·cos180º= –μN·AB; El W_{BA}= F_r·BA·cos180º= –μN·AB ; **El W_{neto}= –2· μN·AB≠0**

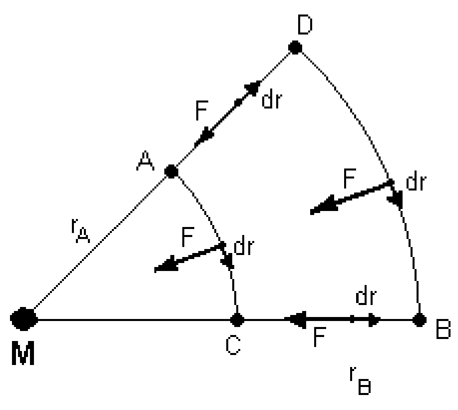
3.1 Fuerzas centrales. Las fuerzas centrales son conservativas.

Recordemos que una fuerza central es aquella cuya dirección y sentido apunta siempre a un punto fijo, el llamado centro de fuerzas, O, y su módulo vario sólo con la distancia a ese centro de fuerzas. Por ejemplo, la fuerza gravitatoria que hace una masa m_1 sobre otra m_2 es radial (la F_{12} apunta siempre a la 1) y su módulo depende sólo de la distancia, concretamente del cuadrado de la distancia: $\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m m_2}{r^2}\vec{u}_r, siendo\ \vec{u}_r = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$

Una fuerza central puede expresarse, de manera general, como:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}.$$

Vamos a demostrar que todas las fuerzas centrales, todas aquellas que apuntan siempre al mismo sitio (gravitatoria, eléctrica, elástica) son conservativas por el mero hecho de ser centrales. Lo haremos con la gravitatoria, pero el resultado es complemente general.



Supongamos una masa m que se mueve atraída por una masa M desde A hasta B por esos 2 posibles caminos dibujados en el dibujo adyacente, el camino ACB y el ADB. El trabajo de la fuerza gravitatoria F por el camino ACB será:

$$W_{ACB} = \int_A^C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_C^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

La primera de esas integrales será 0 porque **F** y d**r** son perpendiculares en todo momento y la segunda quedará

$$W_{ACB} = \int_C^B G\frac{Mm}{r^2}\cdot \mathrm{dr}\cdot cos180º = -GMm\int_C^B r^{-2}dr = -GMm\left(\frac{r^{-1}}{-1}\right)\Big]_C^B = G\frac{Mm}{r}\Big]_C^B = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_C}$$
$$= G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A}, ya\ que\ r_C = r_A$$

Curiosamente el W sólo depende de la posición inicial y final. Veamos si esto pasa con el otro camino. En el camino ADB el W sería la suma de 2 integrales, la segunda, la de D a B, sería 0 al ser **F** y d**r** perpendiculares en todo momento, y la primera, desde A a D, que sería igual que la que hemos realizado antes

$$W_{ADB} = \int_A^D -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\overrightarrow{u_r}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^D -G\frac{Mm}{r^2}\cdot 1\cdot \mathrm{dr}\cdot cos0º == G\frac{Mm}{r}\Big]_A^D = G\frac{Mm}{r_D} - G\frac{Mm}{r_A}$$
$$= G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A}, ya\ que\ r_D = r_B$$

Vemos que el resultado es el mismo. ¿Y si el camino elegido fuese uno al azar que no fuese ninguno de estos 2? Siempre podemos aproximarnos a ese camino cualquiera por una sucesión de caminos radiales y semicirculares, tantos como queramos, de tal modo que el W en los semicirculares será 0 y en los radiales será la integral anterior.

3.2 Propiedades de las fuerzas conservativas.

La fuerza gravitatoria y el resto de las fuerzas conservativas (eléctrica, elásticas, siendo centrales las 2) tienen básicamente 2 propiedades por el mero hecho de ser conservativas:

-Tiene asociada una **energía potencial**, que tienen las partículas por su posición en el campo gravitatorio, a diferencia de la cinética, que se tiene por el movimiento.

-La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, se conservará si la partícula se mueve bajo la acción exclusiva de estas fuerzas.

Vamos a estudiar detalladamente cada punto.

4 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Vemos que cuando una **fuerza es central es conservativa** y su trabajo se puede escribir como la diferencia entre el valor de una determinada función al final y al principio. Por lo tanto, no depende del camino seguido y será cero en cualquier camino cerrado.

Vamos a definir **energía potencial de una fuerza conservativa como:**

$$\boldsymbol{E_p = -\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

(El origen del signo menos lo entenderemos luego). Sabemos que el W es:

$$\boldsymbol{W_{F.conservativa} = \int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -E_p]_A^B = E_p(A) - E_p(B) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) = -\Delta E_p}$$

Según lo anterior, para todas las fuerzas conservativas habrá una función, llamada energía potencial, de tal forma que el trabajo que dicha fuerza realiza cuando actúa sobre un cuerpo que va de A a B es:

$$\boldsymbol{W_{F.conservativa} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p}$$

En el caso de la fuerza gravitatoria acabamos de encontrar la función E_P. Su valor es:

$$\boldsymbol{E_p = -G\frac{Mm}{r}}$$ [1]

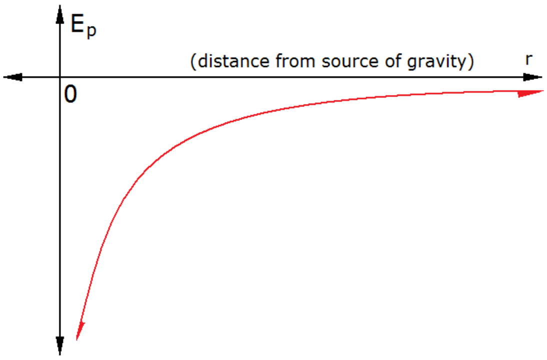
¿Cuál es la ventaja de todo esto? Pues que una vez conocida la ecuación de la energía potencial asociada a una fuerza ***no tendremos que volver a hacer la integral nunca más. Para hallar el trabajo de esa fuerza cuando el cuerpo se mueve de A a B hallaremos su energía potencial inicial y le restaremos su energía potencial final****.*

4.1 Características de la Energía potencial gravitatoria

Definición (enunciado) de E_p en un punto.

[1] Como apostilla matemática podríamos añadir que dicha fórmula, al ser una primitiva, debería contener una constante K, que influirá en el valor de E_p pero no en el del W (ya que se anularía al restar las dos E_p). Habitualmente tomaremos K como 0.

Si representamos en una gráfica como varía la $E_p = -G\frac{Mm}{r}$ con la distancia a la masa M que crea el campo (situada en el punto 0) observamos que su forma es una hipérbola que toma siempre valores negativo (excepto en el infinito donde es cero), y aunque es muy distinta a nuestro antiguo mgh (luego veremos la relación entre ambos) **vemos que muestra la misma tendencia**: **Cuando disminuye la distancia entre masas (r se hace más pequeño) disminuye la energía potencial**, puesto que su valor absoluto aumenta pero como es negativa se hace menor. El valor mayor de la energía potencial de un sistema de 2 masas se alcanza cuando éstas están alejadas infinitamente (r=∞), que vale 0 (el valor máximo).



Aprovecharemos el hecho anterior para dar una definición, un significado físico, a la energía potencial de una masa m situada en un punto A, y B, el punto final, será la separación infinita de esa masa m de todas las que hacen el campo. (B tendrá r=∞ y por tanto, $E_p(B)=0$). Según lo anterior, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando m va de A a ∞ será la $E_p(A)$:

$$W_{A\to\infty} = E_P(A) - E_P(\infty) = E_P(A);\ \boldsymbol{E_P(A) = W_{A\to\infty}}$$

Podemos definir **la energía potencial en un punto de una masa m[2] sometida a la atracción gravitatoria de otra M como el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria para llevar la masa m desde dicho punto al infinito**.

Significado del signo del trabajo.

¿Qué significado le damos a que la energía potencial gravitatoria sea negativa o, más general, **qué sentido le damos al signo del W**?

Podemos averiguarlo sabiendo que las masas se atraen, por lo que **espontáneamente tratarán de disminuir su distancia r y eso supondrá disminuir su energía potencial**. Por tanto,

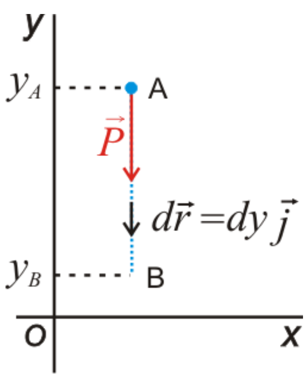
- Si el W que hace la fuerza gravitatoria (o cualquier conservativa, en general) es **W>0**, es porque $E_P(A)>E_p(B)$. El cuerpo se ha desplazado de A a B disminuyendo su energía potencial, que es lo que haría espontáneamente .El proceso habrá sido **espontáneo**.
- Por el contrario, si el W<0 significa que la $E_p(A)<E_P(B)$. La partícula se ha desplazado aumentando su energía potencial, lo cual **no es un proceso espontáneo**.

Este último caso nos da pie a plantearnos una nueva cuestión. Si queremos que el cuerpo se desplace del punto A, de menor energía potencial, al punto B, de mayor energía potencial, al no ser el proceso espontáneo será necesario que una fuerza no gravitatoria lo desplace. El trabajo que hará esa fuerza, opuesta a la gravitatoria, $\vec{F}\ (no\ gravitatoria) = -\vec{F}\ (gravitatoria)$, por lo que ambos trabajos tendrán signos contrarios. El W hecho por esa fuerza no gravitatoria se podría calcular como $E_p(B)–E_P(A)=\Delta E_p$ y en este último caso sería positivo. A veces en algún ejercicio hallaremos no el trabajo que hace el campo sino el "trabajo que hay que hacer para trasladar" una masa de A a B y ese será justo el W realizado por esa fuerza no gravitatoria.

Relación con mgh:

Acabamos de ver que $\boldsymbol{E_p = -G\frac{Mm}{r}}$, pero nosotros recordamos una expresión usada en cursos anteriores para la E_P=mgh. ¿Hay alguna relación entre las dos expresiones?

Recordemos primero cómo obteníamos la expresión mgh. Lo hacíamos calculando el trabajo que hace el peso de un objeto al caer desde el punto A, a una altura y_A (o h_A) al suelo, punto B, por cualquier camino (ya sabemos que es una fuerza conservativa). Si calculamos el W realizado por el peso, $\vec{P} = -mg\vec{j}$ a lo largo del desplazamiento de A a B tendremos:



$$W = \int_A^B -mg\vec{j}\cdot dy\vec{j} = -mgy]_{y_A}^{y_B} = mgh_A - mgh_B = mgh_A$$

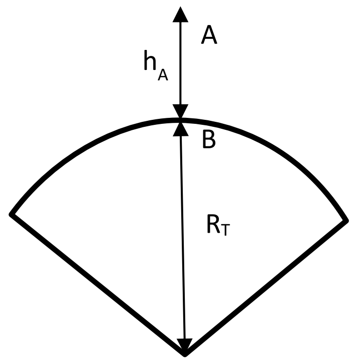
[2] Muchas veces hablamos de la energía potencial de una partícula y no es correcto del todo, ya que demos hablar de la energía potencial de **un sistema de partículas**. Si M desaparece no ha y atracción gravitatoria y por tanto E_p. Cuando queremos hallar la E_p de un sistema de muchas partículas deberíamos calcular la Energía potencial de todos los pares posibles (sin repetir) y luego sumariamos todas:

$$E_p = \sum_i\sum_j -\frac{Gm_im_j}{r_{ij}^2}\ (siendo\ i < j)$$

Donde hemos cambiado y por h y hemos considerados que la altura del suelo era 0, h_B=0. **La clave ha sido que mg, al ser constante, sale fuera de la integral** (no haría falta integrar, de hecho)

¿Podemos llegar a la misma expresión usando la más general de $E_p = -G\frac{Mm}{r}$? Nos planteamos el mismo caso que antes, pero ahora desde otro punto de vista, como se ve en la figura lateral

$$\left.\begin{aligned} E_P(A) &= -G\frac{M_T m}{R_T+h_A} \\ E_P(B) &= -G\frac{M_T m}{R_T}\end{aligned}\right\} W_{F.grav} = E_P(A) - E_P(B) = -G\frac{M_T m}{R_T+h_A} + G\frac{M_T m}{R_T} =$$



$$W_{F.grav} = -GM_T m\left(\frac{1}{R_T+h_A}+\frac{1}{R_T}\right) = -GM_T m\frac{(R_T - R_T - h_A)}{(R_T+h_A)\cdot R_T}$$
$$= mg_0 R_T^2\frac{h}{(R_T+h_A)\cdot R_T} = mg_0 h_A\frac{1}{\frac{(R_T+h_A)\cdot R_T}{R_T^2}}$$
$$= mg_0 h_A\frac{1}{1+\frac{h}{R_T}}$$

Si consideramos alturas pequeñas en comparación con el radio terrestre $h \ll R_T$ el último cociente es 1. $\Delta Ep = m\cdot g_0\cdot h_A$ para valores de $h_A \ll R_T$. La desviación entre las 2 expresiones es mayor cuanto mayor es la h. Por ejemplo, para $h=R_T$ la desviación es que el W vale, realmente, $mg_0h_A/2$, una desviación del 50% del valor calculado con la fórmula, en este caso errónea, mgh.

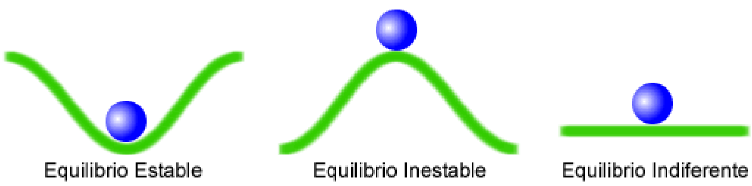
La conclusión es que usaremos la expresión mg_0h para cálculos en los que el objeto que se mueve sufre cambios pequeños de posición en comparación con las dimensiones del problema. Si dudamos, **la expresión $E_p = -G\frac{Mm}{r}$ es la que tiene validez universal**, en todos los casos. La otra es una aproximación cuando g permanece constante en el recorrido del objeto.

Relación Fuerza-Energía potencial:

Por cierto, si la E_P es la menos integral de la fuerza, la fuerza será la menos derivada de la energía potencial (agregándoles el correspondiente vector $\mathbf{u_r}$)

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r$$

Si la energía potencial crece con la distancia, la derivada será positiva (la derivada es la pendiente de la recta tangente) y como tiene un signo menos delante, la fuerza apuntará hacia la zona de decrecimiento de la E_p. Igual conclusión obtendríamos si la E_P fuese decreciente al aumentar la r, la derivada sería negativa y la fuerza apuntaría hacia u_r, justo hacia donde hemos dicho que decrece la E_P. Es decir, la **F** apunta hacia los mínimos de la E_P. Este hecho se puede interpretar diciendo que las fuerzas conservativas tratan de llevar a los cuerpos a los mínimos de energía potencial. De hecho, si la E_P tiene un mínimo en un punto, la F=0 en ese punto (equilibrio estable). También hay puntos de equilibrio (F=0) en los máximo de la E_P, pero estos son equilibrios inestables, porque cualquier mínimo desplazamiento del cuerpo hará que la F lo desplace de dicho punto.



5 TEOREMA DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.

- **Si sobre un cuerpo sólo actúan fuerzas conservativas**, como:

  $W_{neto} = W_{F\ .conservativas} \rightarrow \Delta E_C = -\Delta E_p$; $\Delta(E_c+E_p)=0$;

  $\Delta E_{mecánica}$=0 (Teorema de conservación de la energía mecánica).

  "Si sólo actúan fuerzas conservativas sobre un cuerpo, su energía mecánica, suma de la energía cinética y todos los tipos de energía potencial que tenga, permanece constante".

  De ahí el **nombre de estas fuerzas** y de ahí en empeñarnos antes en que el **W fuese $-\Delta E_p$** (el signo menos) para que la energía mecánica se defina ahora como la suma de la $E_{cinética}$ más la $E_{potencial}$. Cuando tengamos varias fuerzas conservativas debemos sumar todas en la expresión de la energía mecánica. Es fácil recordar cuando una fuerza es conservativa: *Tendremos alguna fórmula para su energía potencial y el trabajo que ella realiza estará incluido, en forma de E_p, en la $E_{mecánica}$.*
- **Si además de fuerzas conservativas hay no conservativas** (como una fuerza externa, un motor a reacción, la fuerza de rozamiento ,etc) deberemos calcular el trabajo que hacen estas últimas

mediante:

$W_{neto}=W_{F\ .conservativas}+W_{F.\ no\ conservativas} \rightarrow \Delta E_C= -\Delta E_p+ W_{F.\ no\ conservativas}$; $\Delta(E_c+E_p)= W_{F.\ no\ conservativas}$;

$$\boldsymbol{\Delta E_{mecánica}= W_{F.\ no\ conservativas}}$$

La energía mecánica no se conserva y su variación coincide con el $W_{F.\ no\ conservativas}$. Este es el caso, por ejemplo, de un cuerpo que se mueve sometido a una fuerza de rozamiento, que continuamente pierde energía mecánica, al ser el W de la fuerza de rozamiento negativo. Pero también hay fuerzas no conservativas que incrementan la energía mecánica de un cuerpo. Piensa en un cohete (espacial o pirotécnico), que pasa de estar parado en nuestro nivel a ganar altura y velocidad (ganar, por tanto, E_m). Esa E_m procede del W realizado por la fuerza del cohete[3].

6 POTENCIAL GRAVITATORIO.

Igual que para la fuerza (concepto mecánico) definimos el campo (F/m), para la **energía potencial definiremos un concepto de campo relacionada con ella, el potencial**.

- El potencial gravitatorio es una magnitud escalar que se define en cada punto del espacio como la energía potencial gravitatoria por unidad de masa situada en ese punto.

$$\boldsymbol{V_g = \frac{E_p}{m}} \ (en\ función\ de\ m)$$

- Si el campo lo crea una sola masa

$$\boldsymbol{V_g = \frac{E_p}{m} = \frac{-G\frac{Mm}{r}}{m} = -G\frac{M}{r}} \ (en\ función\ de\ M)$$

Con el criterio habitual (considerar 0 la E_{pot} en el infinito) **el potencial sería negativo en cualquier punto del espacio** excepto en el infinito.

Las **unidades** en que se mide el potencial gravitatorio son **J/Kg** en el Sistema Internacional.

Podemos calcular el V_g creado por varias masas M_1, M_2, … , **usando el principio de superposición, calculando el potencial que crearía cada masa M_1, M_2, … en ese punto y a continuación sumarlos todos, como hacíamos con el campo gravitatorio $\vec{g}$, con la ventaja de que ahora será una suma de escalares en vez de suma de vectores** (a cambio, tendremos que tener precaución en respetar los signos, pues son números los que sumamos ahora. No trabajamos con módulos de vectores).

$$\boldsymbol{V_g = \sum V_{gi} = \sum -\frac{GM_i}{r_i}}$$

Usaremos el concepto de potencial para lo mismo que usábamos la E_p, para calcular trabajos realizados por las fuerzas gravitatorias. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{E_p=mV_g}$ podremos escribir:

$$\boldsymbol{W_{AB} = m(V_g(A) - V_g(B)) =- m\Delta V_g}$$

Como vemos en una de las expresiones anteriores, V aumenta con r hasta valer 0 en r=∞. Si tomamos el punto B como ∞ (por tanto, $V_g(B)=0$), definiríamos el $V_g(A)$ como:

$$\boldsymbol{V_g(A) = \frac{W_{A\rightarrow\infty}}{m}}$$

Es decir, **el potencial en un punto** es el **trabajo por unidad de masa** que realizan las fuerzas gravitatorias para llevar la masa **desde ese punto hasta el infinito.** Dicho potencial es **siempre negativo indicando que el proceso siempre es no espontáneo**, es decir, **la fuerza gravitatoria es siempre atractiva.**

El campo gravitatorio, al ser un concepto de campo (tiene un valor único en cada punto del espacio) se puede representar también mediante las **líneas equipotenciales** (unen puntos de igual potencial). **Estas líneas son perpendiculares en cada punto del espacio a las líneas de campo**, pero el manejo es más sencillo, puesto que el potencial es una magnitud escalar. En el dibujo del campo gravitatorio terrestre de la página 10 anterior, las líneas equipotenciales están representadas mediante líneas discontinuas. Además, **no pueden cortarse** ya que si se cortasen en el punto de corte habría 2 valores del potencial, cosa imposible por su definición unívoca.

Por último, podemos señalar que la misma relación que hay entre energía potencial y fuerza existe entre campo gravitatorio y potencial, pues, al fin y al cabo, esto últimos son los primeros por unidad de masa. Recordando la relación vistan en el tema de W y E, podemos escribir $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r$. Si dividimos en ambos

[3] que a su vez procede de la energía química de la pólvora. Recuerda que al final, sin tenemos en cuenta todas las formas de energía, no sólo las mecánicas, **la energía ni se crea ni se destruye, sólo se transforma** (primer principio de la termodinámica).

miembros de la igualdad por m y, como es constante, la introducimos dentro de la derivada del 2º miembro nos queda $\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=-\frac{d\left(\frac{Ep}{m}\right)}{dr}\vec{u}_r=-\frac{dV_g}{dr}\vec{u}_r$, **pudiendo obtener las mismas conclusiones que obtuvimos en el tema de W yE, pero referidas a la relación campo-potencial**. Así, si tenemos una gráfica de la función potencial, el valor del campo en cada punto coincidirá con la pendiente de la curva de potencial en dicho punto. El signo menos nos indica, como entonces, que el campo se opone al crecimiento del potencial, o dicho de otra manera, el campo siempre apunta hacia las zonas de menor potencial. Como entonces tambien, si el potencial tiene en un punto derivada cero (por ser un valor mínimo, máximo o constante), el campo también será cero en dicho punto y por tanto la fuerza gravitatoria también. Será un punto de equilibrio estable, inestable o indiferente.

7 MOVIMIENTO DE UN CUERPO EN UN CAMPO GRAVITATORIO.

En los sistemas constituidos por partículas sometidas exclusivamente a la acción de fuerzas centrales (suponemos despreciable la acción del rozamiento u otras fuerzas ajenas a la gravitatoria), el movimiento está determinado por el hecho de que la energía mecánica del sistema permanece constante, E_{mec} =cte. E_{mec}= E_{cin}+ E_{pot}

$$E_{mecanica}=\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{Mm}{r}\right)$$

Para estudiar los valores de la ecuación anterior nos podemos empezar planteando un caso límite. Cuando lanzamos desde la superficie terrestre un objeto a una cierta velocidad, comprobamos que debido a la atracción gravitatoria éste siempre vuelve al punto de partida. ¿***Habrá algún valor de la velocidad a partir del cual ya no regrese a la Tierra el objeto***? Supongamos para ser más generales que el objeto de masa m parte desde un punto situada a una distancia r del centro de la Tierra con una velocidad v (velocidad que habrá conseguido, por ejemplo, con un cohete). A partir de ese momento, la única fuerza que actúa sobre el objeto es la gravitatoria, por lo que la energía mecánica del mismo se mantendrá constante.

Si queremos que el objeto no regrese a la Tierra debe ser capaz de llegar al punto donde la Tierra no ejerza fuerza gravitatoria sobre él y este punto está situado a una distancia infinita de la Tierra, ya que entonces F=0. Si recordamos, además, que deseamos darle la menor velocidad de partida querremos que cuando llegue a esa distancia infinita de la Tierra se pare, para que no le sobre nada de energía, lleve la mínima posible. Como la energía mecánica se conserva:

$$E_m(A)=E_m(\infty)$$

La energía mecánica en el punto de partida será la suma de la E_C y la E_P

$$E_m(A)=\frac{1}{2}mv_A^2-G\frac{M_Tm}{r}$$

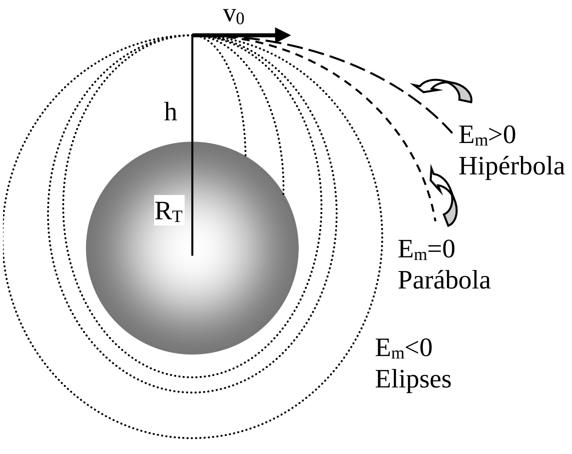
En r=∞, la energía potencial será 0 y la energía cinética también será 0, por lo que:

$$E_m(A)=\frac{1}{2}mv_A^2-G\frac{M_Tm}{r}=0$$

Esa v_A será la denominada **velocidad de escape**, que es ***el valor mínimo de la velocidad que debe llevar el objeto en A para escapar de la atracción gravitatoria***, es decir, alejarse infinitamente del objeto atractor

$$\frac{1}{2}mv_{escape}^2-G\frac{M_Tm}{r}=0\ ;\ \boldsymbol{v_{escape}}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{2GM_T}}{\boldsymbol{r}}}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{2g_{0T}R_T^2}}{\boldsymbol{r}}}$$

Expresión muy parecida a la de la velocidad orbital de un satélite (salvo por el 2 del numerador). Esa será la velocidad mínima que debe tener el cuerpo para llegar a una separación infinita y detenerse en ese momento. Desde la superficie de la tierra, R_T=6,37·10^6 m; G=6,67·10^{-11} N·m^2/Kg^2 y M_T=5,97·10^{24} Kg, se obtiene para la velocidad de escape un valor de 11181 m/s ≈11,2 km/s aproximadamente, que pasa a ser de 11 km/s si el cuerpo se lanza a h=200 km por encima de la superficie terrestre (r= R_T +h). A esa altura aproximadamente paró los motores el Apolo XI en su viaje a la luna y llevaba lógicamente esa velocidad.



Como hemos visto antes, si la velocidad del objeto es la v_{escape} su energía mecánica será 0 y escapará de la atracción gravitatoria y no volverá. Pero, ***¿qué ocurrirá si lleva más o menos velocidad que la anterior?***:

- Si la $v>v_{escape}$, su $E_{mecánica}$ es >0, entonces el cuerpo no sólo escapará de la atracción gravitatoria del otro sino que le sobrará velocidad (energía cinética) cuando se separe hasta el infinito. **Diremos que es un sistema libre, no ligado**.
- Si la $v<v_{escape}$, su $E_{mecánica}$ será negativa, ya que con la v_{escape} era 0. En este caso el cuerpo no podrá escapar de la atracción gravitatoria del otro, es un **sistema ligado** y se puede demostrar que su órbita sería una elipse. También podemos demostrar que su $E_{mecánica}$ es negativa si suponemos que la órbita es circular. En este caso la fuerza centrípeta es igual a la masa por la aceleración normal.

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r};\ mv^2 = G\frac{M_T m}{r}$$

Si sustituimos esta expresión en la de la $E_{mecanica}$:

$$\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{r} = \frac{1}{2}\,G\frac{M_T m}{r} - G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}}$$

Al valor de esta energía mecánica negativa se la denomina **energía de enlace**, porque es la cantidad de energía que añadida al cuerpo haría que tuviese 0 y por tanto sería un cuerpo libre, podría escapar de la atracción gravitatoria. Un satélite como los estudiados anteriormente es un sistema ligado, como es lógico.

Agujeros negros

En la ecuación que nos permitía calcular la velocidad de escape podemos ver que si un objeto es muy masivo (M muy grande) y compacto (R pequeño) tiene una gran velocidad de escape. Sabemos que la luz viaja en el vacío con una velocidad c=300 000 km/s. Podría ocurrir que una estrella fuese tan pequeña y masiva que no permitiese que la luz escapase de ella, sería una "estrella oscura" (un agujero negro). El geólogo inglés John Mitchell pensó en 1783 que ese tipo de estrellas oscuras eran posibles, una estrella tan densa que la luz no escapase de ella. Hoy llamamos a estos objetos agujeros negros.

Si sustituimos en esa ecuación $v_{escape}=c$

$$R_{agujero\ negro} = \frac{2GM}{c^2}$$

Ese sería el llamado "horizonte de sucesos" del agujero negro (https://es.wikipedia.org/wiki/Horizonte_de_sucesos)

Si calculamos que radio debería tener el sol con toda su masa ($2\cdot10^{30}$ kg) para convertirse en un agujero negro, el radio seria unos 3 km. El sol debería contraer toda su masa para ocupar ese pequeño radio y convertirse en un agujero negro.

7.1 Satélites artificiales. Satélites geoestacionarios.

Los satélites artificiales se suelen lanzar desde algún punto del ecuador y en dirección hacia el Este, con el fin de aprovechar al máximo la energía de rotación de la tierra (la velocidad de un punto de la superficie de la Tierra es mayor en el Ecuador que en cualquier otro y la Tierra gira de Oeste a Este).

- La **velocidad del satélite** en la órbita circular vale:

$$v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Que vemos que es menor que la velocidad de escape, que contiene un 2 dentro de la raíz cuadrada.

- La **energía de enlace** del satélite será:

$$E_{enlace} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{Mm}}{\boldsymbol{r}} < 0$$

Un satélite se dice **geoestacionario** cuando desde la Tierra parece que está quieto; en realidad lo que ocurre es que la velocidad angular del satélite es igual a la de la Tierra y por tanto *el periodo orbital de ese satélite es el mismo que el de rotación de la Tierra: 24 horas.*

7.2 Ley de conservación de la energía para poner en órbita un satélite

Como ejercicio es ilustrativo aplicar el principio de conservación para algunos procesos:

a) Trabajo realizado para poner un satélite de masa m en órbita desde la superficie, sin tener en cuenta la velocidad de rotación de la Tierra:

$E_M\ (superficie) = -G\frac{M_T m}{R_T}$ $\quad E_M\ (órbita) = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$

pero sabemos de mecánica que $W_{exterior}=\Delta E_{mecánica}$ con lo que

$$W_{exterior} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} + G\frac{M_T m}{R_T} = GM_T m\left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right] > 0$$

b) Trabajo realizado para llevar un satélite desde una órbita “r_1” a otra “r_2”:

$$W_{exterior} = \Delta E_{mecanica} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_2} + \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_1} = \frac{1}{2}GM_T m\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Se deja para el alumno la discusión para el caso de que el satélite pase de una órbita de un cierto radio a otra de radio mayor y al contrario, que pase de una exterior a otra más interior.

Pistas: Como la $E_{mecánica}$ de un satélite es $-\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$, si queremos que su órbita sea mayor (aumenta r, el cociente disminuye y al tener signo menos delante se hace menos negativo, es decir, se acerca al 0, aumenta la energía mecánica. Si tiene mayor radio tiene más energía mecánica) debemos comunicarle $E_{mecánica}$ y eso será a consta de hacer un $W_{exterior}$ positivo, es decir, encendiendo los cohetes del satélite. Y si queremos que pase a una órbita inferior (menor $E_{mecánica}$) debemos hacer un trabajo negativo, con los retrocohetes que frenarán el satélite. Lo peculiar es cómo esto encaja con nuestra idea de que si la orbita es menor la velocidad orbital es mayor ¿no hemos quedado en que hay que frenarlo? ¿Y si la órbita es mayor, debemos acelerarlo a pesar de que enn la órbita de destino su velocidad orbital será menor, por tener mayor radio? ¿Cómo encajamos esas aparentes contradicciones?

No lo son. Si frenamos el satélite, al disminuir su $E_{mecámica}$ y su velocidad, caerá a una orbita inferior y en ese proceso de caída parte de su $E_{potencial}$ se convertirá en cinética, con lo que ganará velocidad hasta tener la adecuada para la órbita en la que se va a quedar, velocidad que será mayor que la de partida. Hemos tenido que frenarlo para que al caer gane velocidad. ¿curioso, no? Igual, pero a revés para el otro caso. Se puede ver como se hace un cambio de órbita en http://bit.ly/2JJ63Z2.

7.3 ¿Ingravidez?

Sorprende ver a los astronautas de la estación espacial internacional (ISS) viajando de un lugar a otro de la nave “ingrávidos”, flotando por el espacio. ¿No acabamos de decir que si ese satélite gira alrededor de la Tierra es porque esta lo atrae?¿g no será 0 a la altura a la que gira el satélite? Efectivamente, la ISS se encuentra a unos 400 km de altura y en ese punto g no es 0 (de hecho, g no puede ser cero en ningún satélite, pues en ese caso la fuerza gravitatoria sería 0 y no giraría). ¿Por qué la ingravidez aparente, entonces?.

Pensemos (quizás es más fácil) en una ingravidez momentánea, la que se produce en una atracción de feria que no sube muy alto y nos deja caer en caída libre unos segundos. Durante esos segundos, si soltásemos un objeto, este caería con nosotros con idéntica aceleración 9,8 m/s^2 y permanecería delante de nosotros, sin que hubiese movimiento relativo entre nosotros. Si viajáramos en un recinto cerrado, nos pasmaría dejar una pelota y que esta no cayese (visto desde fuera de la atracción, ambos caemos, la pelota y el sujeto). La clave de esa ingravidez es que ambos llevamos la misma a=g y por tanto no tenemos movimiento relativo entre nosotros. Lo mismo, pero mejor, ocurre en la estación orbital espacial. La ISS y el astronauta giran con igual v, igual r y por tanto tienen igual a_{normal}, que coincidirá con la gravedad a esa altura (a_n=g). Al tener ambos igual aceleración y velocidad no hay movimiento relativo entre ellos. En realidad, el astronauta es “otro satélite” en órbita que necesita de la ISS para protegerse del exterior, respirar, etc. Pero son 2 objetos en órbita. En algunas películas se propone, como mecanismo para crear una gravedad artificial en un satélite poner a girar el satélite sobre su eje, de tal forma que aparezca una aceleración normal que “simule” la gravedad.

8 ANEXO 1:

8.1.1 VARIACION DE g CON LA ALTURA

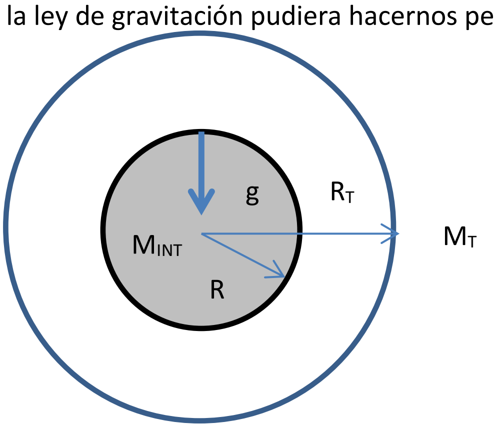
Ya sabemos que para calcular g cuando quien crea el campo no es una masa puntual, sino una esfera homogénea y uniforme (que supondremos es la Tierra) la consideraremos como si toda su masa estuviese concentrada en el centro terrestre. Es decir:

$$g = G\frac{M_T}{R^2} = g_0\frac{R_T^2}{R^2} = g_0\left(\frac{R_T}{R}\right)^2 = \frac{cte}{R^2}$$

Vemos que el valor de la g disminuye con R^2, siendo igual a g_0 si $R=R_T$ (h=0) e igual a $g_0/4$ si $R=2R_T$ ($h=R_T$).

8.1.2 VARIACION DE g CON LA PROFUNDIDAD

En este caso asumiremos (se puede demostrar matemáticamente mediante un concepto, el de flujo de un campo vectorial, y un teorema, el de Gauss, que veremos posteriormente) que el campo gravitatorio en un punto situado a un radio R del interior de una esfera maciza y homogénea es el que crearía una masa m', que se correspondería con la masa de la esfera interior de radio R, situada en el centro de la esfera. Para calcular el valor de g en ese punto sólo se tiene en cuenta la masa de la esfera interior que pasa por dicho punto (por tanto en el centro de la Tierra la gravedad será 0, y no infinito como una aplicación superficial de la ley de gravitación pudiera hacernos pensar).



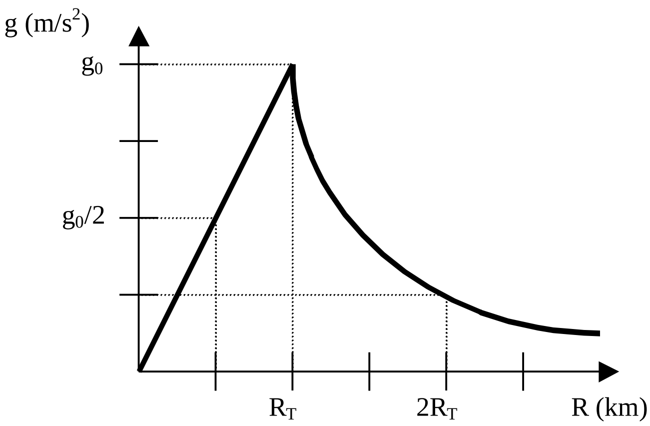
Para calcular la masa interior contenida en esa esfera de radio R ($R<R_T$) usaremos el concepto de densidad. Hallaremos la densidad de la Tierra y multiplicándola posteriormente por el volumen de esa esfera calcularemos la masa que encierra M_{INT}.

$$M_{interior} = d_T \cdot V_{interior} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = M_T\frac{R^3}{R_T^3}$$

, siendo d_T la densidad terrestre y $V_{INTERIOR}$ el volumen interior de la esfera de radio R.

$$g = G\frac{M_{interior}}{R^2} = G\frac{M_T\frac{R^3}{R_T^3}}{R^2} = G\frac{M_T R}{R_T^3} = g_0\frac{R}{R_T}$$

Donde hemos usado que $g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$. La ecuación obtenida nos indica que el valor de g disminuye linealmente a medida que nos acercamos al centro de la tierra (R disminuye) siendo cero en el mismo (la ingravidez real). Podemos comprobar que la ecuación obtenida anteriormente es exacta si nos fijamos que para $R=R_T$, el valor de g es. Podemos representar como varia el campo gravitatorio dentro y fuera de la corteza terrestre utilizando las dos funciones anteriores:



$$g(R) = \begin{cases} g_0\frac{R}{R_T} & si\ R \le R_T \\ g_0\frac{R_T^2}{R^2} & si\ R \ge R_T \end{cases}$$