dicho punto son paralelos. Acabamos de estudiar que: "**cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza central, su momento angular $\vec{L}$ con respecto al centro de fuerza permanece constante**"

Ejemplos de situaciones con fuerzas centrales los encontramos en el modelo atómico de Bohr o en el movimiento de los planetas alrededor del sol.

4.5 Consecuencias del principio de conservación del momento angular

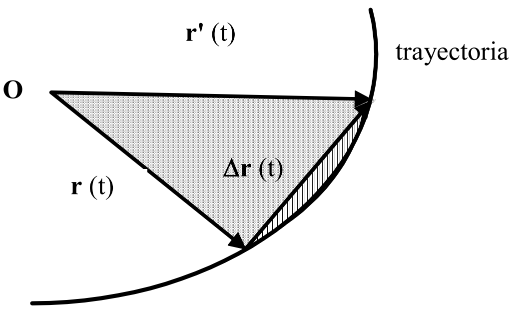
Cuando una partícula conserva constante su momento angular, sea por el motivo que sea, su movimiento debe estar sujeto a unas reglas muy estrictas que vienen marcadas por la propia necesidad de que $\vec{L}$ sea constante.

- Para que $\vec{L}$ sea constante en dirección, como es perpendicular al plano de la trayectoria, formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, por la definición de producto vectorial, este plano no puede cambiar, lo cual nos lleva a decir que el movimiento **debe ser de trayectoria plana**.
- Como $\vec{L}$ debe tener siempre el mismo sentido para ser constante y éste viene dado por la regla de la mano derecha aplicada entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$, el cuerpo no puede cambiar de sentido del movimiento. Si la partícula está girando, siempre debe **girar en el mismo sentido**.

ESTAS 2 IDEAS ANTERIORES SON LA "DEMOSTRACIÓN" DE LA 1ª LEY DE KEPLER.VEAMOS LA 2º:

- $\vec{L}$ debe ser constante en módulo. Podemos demostrar que esta necesidad conduce a que el cuerpo, en su movimiento, cumpla la **Ley de las áreas** de Kepler, enunciada anteriormente y que afirmaba que el radio vector que une el Sol con un planeta tiene *velocidad areolar constante*, $\frac{dS}{dt} = cte.$

Demostración:



La figura lateral representa a un cuerpo (se toma el origen O en el centro de fuerza) que sigue la trayectoria marcada y los vectores de posición $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ en 2 instantes de tiempo distintos, t y t´, siendo el intervalo de tiempo Δt=t´-t. El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ se define como $\vec{r}' - \vec{r}$ y es el que va desde la punta del 1º a la del 2º. El **área recorrida por el radio vector**, a la que llamaremos **ΔS**, sería el **área total de la figura**, **que es la suma del área del triángulo** cuyos lados son $\vec{r}$, $\vec{r}'$ y $\Delta\vec{r}$ (el área punteada, a la que llamaremos **ΔA**) más el área rayada.

Podemos escribir que **ΔS=ΔA + área rayada**. A medida que el intervalo de tiempo Δt se hace más pequeño (tiende a 0), el área rayada se hará más pequeña y ΔS será igual a ΔA en ese límite (tienden a parecerse).

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta S = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta A$$

El área del triángulo punteado ΔA se puede calcular, teniendo en cuenta la interpretación del módulo de un producto vectorial, como $\Delta A = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$. Al sustituir nos quedaría:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \Delta S = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{2}|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$

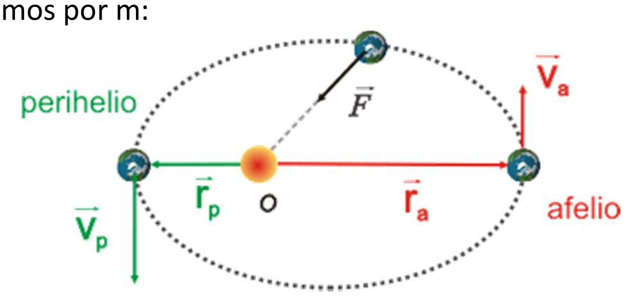
Si dividimos los 2 miembros de la ecuación por Δt y usamos el concepto de derivada nos queda:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{2}|\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}|\,;\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|$$

Para que el segundo miembro sea $|\vec{L}|$, lo multiplicamos y dividimos por m:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{|\vec{L}|}{2m};$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m}$$



Si admitimos que $|\vec{L}|$=cte, $\frac{dS}{dt}$ también será constante, es decir, el nº de m^2 que el radio vector recorre por s será constante.

También podemos aplicar la constancia del $|\vec{L}|$ para comparar las velocidades de un planeta (o cualquier objeto que se mueva en órbita elíptica por acción de una fuerza central) en los puntos especiales afelio y perihelio.

Tanto en el afelio como en le perihelio, $|\vec{L_o}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}|$ ya que sólo en esos 2 momentos v y r son perpendiculares. Como $\vec{M} = 0, \vec{L} = cte$ y $|\vec{L}| = cte$ también, por lo que **$r_A m v_A = r_P m v_P$** (m, en este caso, es la masa de la Tierra). Como $r_P < r_A$, deducimos que $v_P > v_A$. (Ya visto en la **2ª ley de Kepler**)