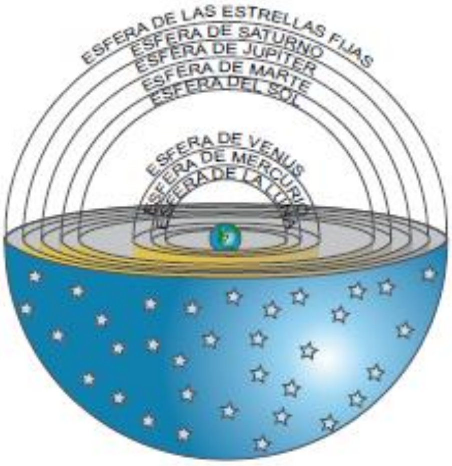
El Modelo Geocéntrico del Universo



Durante la antigüedad y hasta el siglo XVI el modelo predominante que explicaba la posición de la Tierra en el Universo fue el geocéntrico. Desarrollado en el siglo IV a.C., por **Aristóteles.**

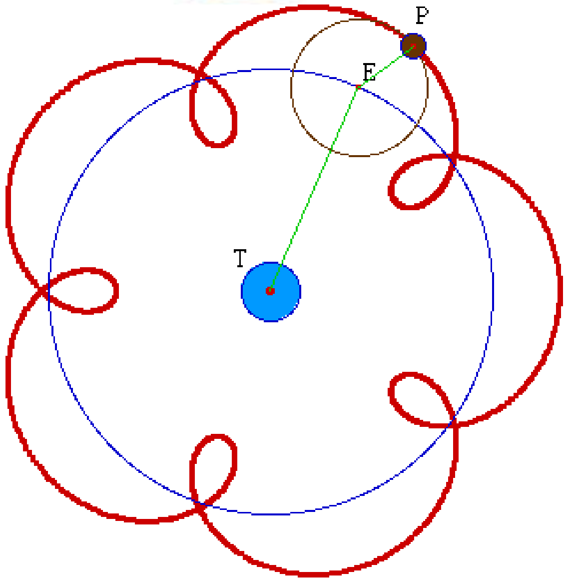
Según este modelo, la Tierra tiene la forma de una esfera, está inmóvil y ocupa el centro del Universo.

Los astros se mueven en torno a la Tierra, transportados por esferas transparentes que giran con movimiento circular uniforme.

A distancias crecientes se hallan las esferas que transportan a la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno. Englobando a todas y más alejada está la esfera de las estrellas.

El modelo geocéntrico no explica la trayectoria aparente que siguen los planetas. En ocasiones retroceden sobre el fondo de las estrellas, para luego seguir con su camino, en lo que se denomina el movimiento retrógrado.

Este movimiento retrógrado de los planetas fue justificado, en el siglo II d.C., por el astrónomo griego **Claudio Tolomeo,** al aplicar las construcciones geométricas de epiciclo y deferente al movimiento de los planetas y dotarlas del aparato matemático necesario para predecir las posiciones astronómicas.



Según Tolomeo, cada planeta se mueve siguiendo una circunferencia, que llamó **epiciclo.** El centro del epiciclo se mueve, a su vez, en torno a la Tierra, describiendo otra trayectoria circular llamada **deferente.** De esta forma el movimiento de los astros es el resultado de la suma de movimientos circulares uniformes.

El éxito de Tolomeo radicó en que explicaba el movimiento retrógrado de los planetas y podía predecir con bastante exactitud sus posiciones en cualquier momento. También explicaba la diferencia observada en el brillo de los planetas, al relacionarlo con que unas veces se encuentran más cerca de la Tierra, y otras, más lejos.

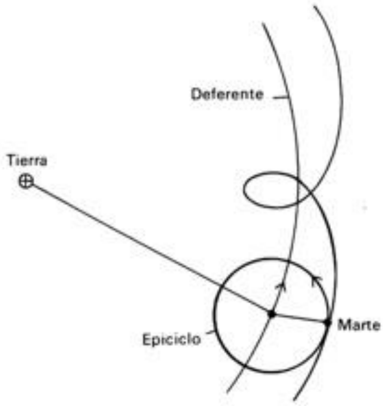
El modelo Heliocéntrico de Copérnico

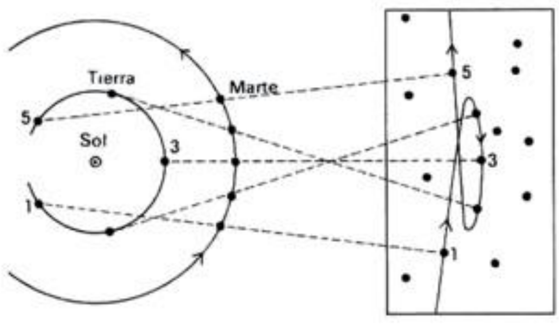
En el siglo XVI, el astrónomo polaco **Nicolás Copérnico** basándose en el mayor tamaño aparente del Sol y en que ilumina al resto de planetas, concibe la idea de que el Sol, y no la Tierra, es el centro del universo.

Este modelo, centrado en el Sol, se apoya en los siguientes supuestos:

- El Sol está inmóvil en el centro del Universo.
- Los planetas, junto a las esferas que los transportan, giran alrededor del Sol según el siguiente orden: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno.
- La Tierra está afectada por dos movimientos importantes: uno de rotación alrededor de su propio eje y otro de traslación en torno al Sol.
- La Luna gira alrededor de la Tierra.
- La esfera de las estrellas está inmóvil y muy alejada.

El modelo explica los fenómenos de la alternancia de los días y de las noches, las estaciones, las fases de la Luna y el movimiento retrógrado de los planetas. Los planetas parece que se mueven hacia atrás porque la Tierra describe una órbita de menor radio y gira más rápido alrededor del Sol, lo que hace que al observar desde ella la posición de los planetas sobre el fondo de las estrellas se produzca ese efecto visual.

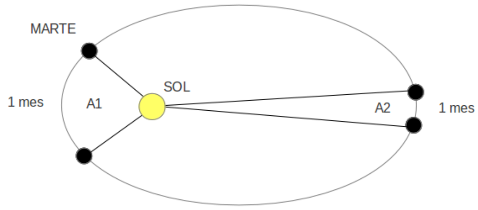




Leyes de Kepler. Justificación por la Ley de Gravitación.

Leyes de Kepler

Primera ley de Kepler: Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, encontrándose éste en uno de sus focos. (Al plano que contiene a la órbita de la Tierra se le denomina **eclíptica**)

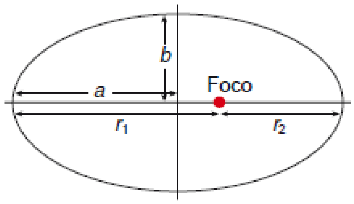


Segunda ley de Kepler o ley de las áreas: El radio vector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Así se explica el que el movimiento de los planetas no sea uniforme: Van más rápidos en la parte de la órbita que está más próxima al Sol que en la parte más alejada del mismo.

Tercera ley de Kepler: Los cuadrados de los períodos del movimiento de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.

$$\frac{T_{Tierra}^2}{r_{Tierra}^3} = \frac{T_{Venus}^2}{r_{Venus}^3} = \frac{T_{Marte}^2}{r_{Marte}^3} = \cdots = C \quad \Rightarrow \quad T^2 = C \cdot r^3$$



La distancia media, r, de un punto de la elipse al foco coincide con el valor del semieje mayor, a, de la elipse.

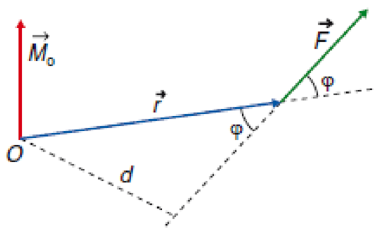
$$r_1 + r_2 = 2 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Momento de una fuerza respecto de un punto

La magnitud característica del movimiento de traslación de una partícula, en un sistema de referencia, es su cantidad de movimiento o momento lineal: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Su variación respecto del tiempo constituye la segunda ley de Newton, que permite hallar la fuerza resultante que actúa sobre una partícula de masa constante.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Para caracterizar el efecto giratorio de las fuerzas sobre los objetos se define la magnitud vectorial momento de una fuerza respecto de un punto.



Momento de una fuerza respecto de un punto O es igual al producto vectorial:

$$\overrightarrow{M_o} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Su módulo es: $\left|\overrightarrow{M_o}\right| = |\vec{r}| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\varphi = d \cdot \left|\vec{F}\right|$

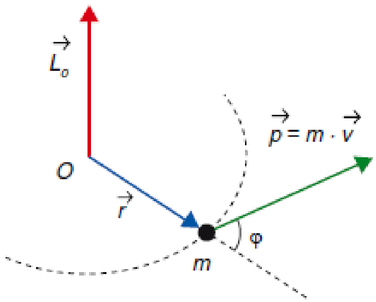
Su unidad S.I. es $m{\cdot}N$

El vector momento de una fuerza respecto de un punto es independiente de la posición en que se encuentre ese vector fuerza en su recta directriz, siempre que no cambie su sentido.

Si sobre un objeto actúan un conjunto de fuerzas, entonces el momento de la fuerza resultante respecto de un punto es igual a la suma de los momentos de cada una de las fuerzas respecto del mismo punto.

Momento Angular

Para describir, con mayor detalle, el movimiento curvilíneo de una partícula se define una nueva magnitud denominada momento angular, llamada también momento cinético o momento de la cantidad de movimiento.



Se define momento angular de una partícula de masa m respecto de un punto O al momento de la cantidad de movimiento de la partícula respecto del mismo punto.

$$\overrightarrow{L_o} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$$

El momento angular es un vector perpendicular al plano que determinan el vector de posición y vector cantidad de movimiento y cuyo sentido es el indicado por la regla de Maxwell, que coincide con el avance de un sacacorchos al voltear el vector posición sobre el vector cantidad de movimiento por camino más corto.

Su módulo es: $\left|\overrightarrow{L_o}\right| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$ Su unidad S.I. es $kg{\cdot}m^2/s$.

Si la trayectoria de la partícula está contenida en un plano y el origen del sistema de referencia O está contenido en ese plano, entonces el vector momento angular es siempre perpendicular a dicho plano. El momento angular depende del punto respecto del que se determina.

Esta magnitud desempeña en rotación el mismo papel que la cantidad de movimiento en el movimiento de traslación.

Ley de conservación del Momento Angular. Fuerzas centrales

El vector momento angular de una partícula respecto de un punto se puede modificar si cambia el vector de posición, si se altera el vector momento lineal, o si se produce una variación de la orientación entre ambos.

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

El primer sumando es igual a cero, pues la derivada del vector posición respecto del tiempo es la velocidad , y su producto vectorial por el vector cantidad de movimiento es nulo por tener éste la misma dirección que aquel. Queda por tanto:

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F} = \overrightarrow{M_o}$$

Expresión denominada ecuación fundamental de la dinámica de rotación para una partícula y es semejante a la segunda ley de Newton en traslación:

La variación del momento angular de una partícula con respecto a un punto, en el transcurso del tiempo, es igual al momento de la fuerza resultante, que actúa sobre ella, respecto del mismo punto.

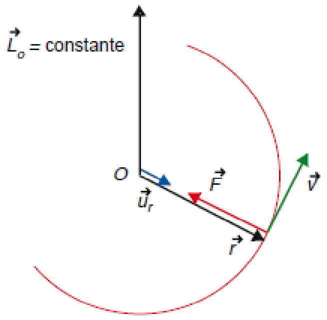
De la ecuación fundamental de la dinámica de rotación se deduce que el momento angular de la partícula respecto de un punto O permanece constante si la fuerza resultante que actúa sobre la partícula es igual a cero, si el vector de posición es nulo, o cuando la fuerza resultante tiene la misma dirección que el vector de posición de la partícula.

$$\vec{r} \times \vec{F} = \overrightarrow{M_o} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{L_o} = \vec{r} \times \vec{p} = constante$$

Un caso especial de conservación del momento angular es en el movimiento de una partícula por la acción de una fuerza central.

Una **fuerza es central** cuando la dirección del vector fuerza pasa por un punto fijo, denominado centro de fuerzas, y su módulo es función solamente de la distancia desde el centro de fuerzas a la partícula considerada.

$$\vec{F} = F(r) \cdot \overrightarrow{u_r}$$



El vector $\overrightarrow{u_r}$ es un vector unitario en la dirección radial a partir del centro de fuerzas. La interacción gravitatoria es una fuerza central.

Si una partícula se mueve por la acción de una fuerza central, su momento angular con respecto del centro de fuerzas permanece constante, ya que el vector fuerza y el vector de posición de la partícula respecto de dicho punto son paralelos.

Expresión vectorial de la ley de Gravitación

La fuerza de atracción que una masa M ejerce sobre otra m, si llamamos r . a la distancia que separa sus centros, siendo entonces $\vec{r}$ el vector posición de m respecto de M , se expresa vectorialmente

$$\vec{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_r} \qquad donde \ \ \overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

El signo negativo se debe a que el vector fuerza $\vec{F}$ y el vector unitario $\overrightarrow{u_r}$ tienen sentidos contrarios, es decir, las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas.

Justificación de las leyes de Kepler a partir de la Ley de Gravitación

- Primera ley de Kepler

La fuerza con la que actúa el Sol sobre los planetas es una fuerza central, ya que tiene la misma dirección que el vector de posición del planeta respecto del Sol. Por tanto, el vector momento angular de un planeta respecto del Sol permanece constante a lo largo de toda la trayectoria.

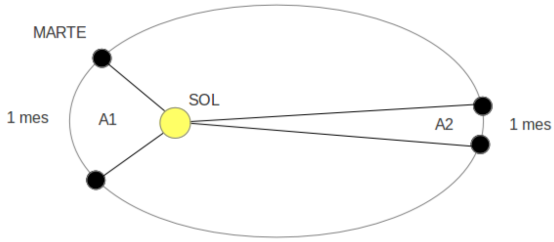
$$\overrightarrow{L_{SoL}} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = constante$$

Si la dirección y el sentido del momento angular son constantes, entonces los vectores posición y cantidad de movimiento están siempre contenidos en el mismo plano y la trayectoria descrita por el planeta es una curva plana, que se recorre siguiendo siempre el mismo sentido

- Segunda ley de Kepler

El módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que delimitan. Entonces el área del triángulo que delimitan $\vec{r}$ y $\overrightarrow{dr}$ es igual a la mitad del valor del módulo de su producto vectorial

$$dS = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \overrightarrow{dr}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v} \cdot dt\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|$$



Como el momento angular del planeta respecto del Sol permanece constante $\overrightarrow{L_o} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = cte$ se tiene

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\left|\overrightarrow{L_o}\right|}{2 \cdot m} = constante$$

Lo que significa que el área barrida por unidad de tiempo por vector de posición de un planeta respecto del Sol, llamada velocidad aerolar, es una cantidad constante, que es otra forma de enunciar la segunda ley de Kepler.

- Tercera ley de Kepler

Sobre los planetas solamente actúa la fuerza de interacción gravitatoria debida al Sol. Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita como circular, se tiene que

$$\vec{F} = m_{planeta} \cdot \overrightarrow{a_n} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_{Sol} \cdot m_{planeta}}{r^2} = m_{planeta} \cdot \frac{v^2_{planeta}}{r} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_{Sol}}{r} = v^2_{planeta}$$

La relación entre la velocidad y el período es:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Sustiyendo se tiene

$$G \cdot \frac{M_{Sol}}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_{Sol}} = constante$$

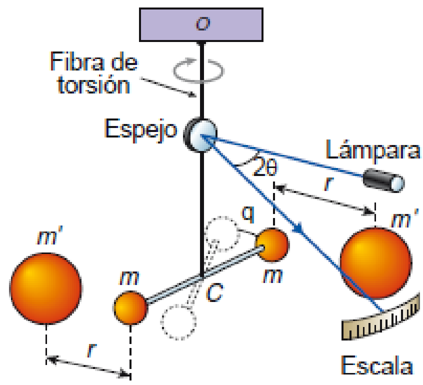
El valor de la constante sólo depende de la masa del Sol y es independiente de la masa de los planetas.

La constante de Gravitación G

La constante de gravitación universal G la determinó el físico inglés **Henry Cavendish,** en 1798, utilizando una balanza de torsión.

Dos esferas de masa m están colocadas en los extremos de una varilla horizontal, muy ligera, la cual está suspendida por su punto medio por un hilo de fibra de cuarzo. El hilo lleva adosado un espejo sobre el que incide un rayo de luz que, después de reflejarse, se recoge en una escala graduada.

A ambos lados de la barra, en el mismo plano horizontal, se colocan otras dos esferas fijas de mayor masa, m'. Debido a la atracción gravitatoria se genera un par de fuerzas sobre la varilla que tiende a hacerla girar, en torno al hilo.



El hilo de cuarzo tiene un momento de torsión que se opone al par de fuerzas gravitatorio. Alcanzado el equilibrio, se mide el ángulo de giro, que es proporcional al momento de torsión y del que se deduce el valor de la constante de gravitación universal G.

Este valor es: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$, y es independiente de las características de los objetos y del medio en el que se sitúen.

De la ley de gravitación universal, se deduce que la constante G representa el módulo de la fuerza con la que interaccionan dos objetos de 1 kg de masa situados a la distancia de 1 m.

Conocido este valor se puede calcular la masa de la Tierra y la de cualquier otro astro, con tal de lograr medir el período de traslación de algún planeta o satélite que gire a su alrededor.