FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL. TEOREMA DE GAUSS.

1. CONCEPTO DE FLUJO. CÁLCULO:

Se define el **flujo** de un campo vectorial a través de una superficie como el número de líneas de campo que atraviesan dicha superficie. Se representa mediante la letra griega Φ (phi) y teniendo en cuenta que los campos que hemos estudiado hasta ahora, el eléctrico y el gravitatorio, se han considerado siempre **estacionarios**, es decir, que no varían con el tiempo, el flujo de dichos campos también lo será.

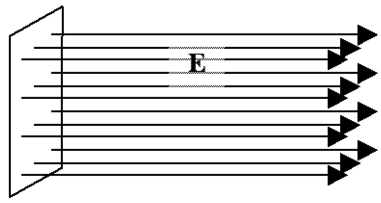
Su cálculo es muy sencillo desde el punto de vista matemático si recordamos que cuando representamos un campo vectorial se hace el convenio de representar un número finito de líneas de campo, de manera que el número de ellas que atraviesen la unidad de superficie colocada perpendicularmente a las mismas en cada punto coincida con el valor del campo en el centro de dicha superficie.

Utilizando el convenio anterior, veamos como calcular el flujo de un campo empezando por el calculo en un caso sencillo, para ir poco a poco complicándolo (eliminado las restricciones). Usaremos durante el tema el ejemplo del campo eléctrico, por ser para el que se utiliza más el concepto de flujo.

1.1. Flujo de un campo constante a través de una superficie rectangular perpendicular

Supongamos que deseamos calcular el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie y se cumplen los siguientes 2 requisitos:

- Que el campo sea uniforme, es decir, que valga lo mismo en todos los puntos del espacio.
- Que la superficie a través de la cual deseamos calcular el flujo sea plana y perpendicular al campo en todos los puntos, tal y como se indica en la siguiente figura



Teniendo en cuenta que $|\vec{E}|$ representa el nº de líneas por unidad de superficie colocada perpendicularmente (condición que aquí se produce), si lo multiplicamos por S obtendremos el nº de líneas de campo que atraviesan dicha superficie, el flujo

$$\Phi\ (\text{n}^{\text{o}}\ \text{de lineas}) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\ \text{de lineas}}{\text{unidad de superficie}} \cdot \text{superficie} = \left|\vec{E}\right| \cdot S$$

$\Phi = \vec{E} \cdot S$

ecuación válida si se cumplen las dos condiciones anteriores. Su ecuación de dimensiones será

$$[\Phi] = \left[\frac{F}{q} S\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{Q} L^2\right] = ML^3T^{-2}Q^{-1}$$

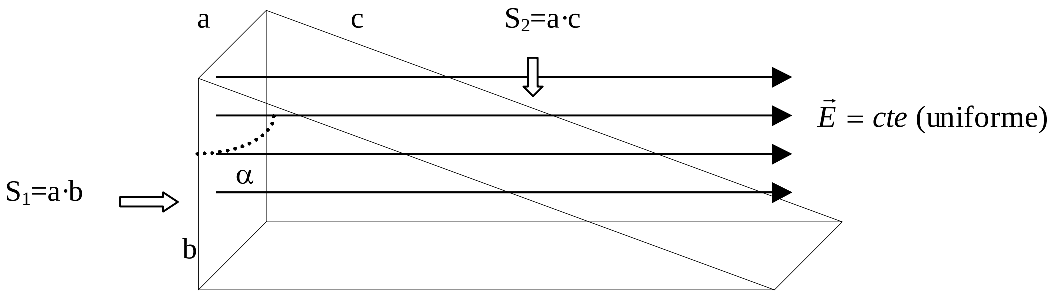
y sus unidades, en el sistema internacional, será Nm^2/C, para el campo eléctrico y Nm^2/kg para el campo gravitatorio (en este último, $\Phi = |\mathbf{g}| \cdot S$)

Nuestro siguiente objetivo será el de intentar remover las dos suposiciones anteriormente realizadas, a fin de que podamos calcular el flujo de un campo vectorial en condiciones mas realistas.

1.2. Flujo de un campo constante a través de una superficie rectangular no perpend.

Supongamos, en primer lugar, que la superficie fuese plana y que el campo fuese uniforme, pero que entre ellos formen un determinado ángulo α y no sean perpendiculares, como antes. Para ello dibujaremos las dos superficies siguientes, S_1 y S_2, la primera de lados a y b y la segunda de lados a (el común) y c. Teniendo en cuenta que b=c·cosα, podemos escribir la relación entre las dos superficies:

$S_1=a\cdot b=a\cdot c\cdot \cos\alpha=S_2\cdot\cos\alpha$



Como todas las líneas que atraviesan la primera de las superficies S_1 también atraviesan la S_2 el flujo a través de ellas será el mismo. El flujo a través de la primera se puede calcular mediante la expresión anterior, pues se cumplen las 2 condiciones:

$\Phi_1=|\vec{E}|\cdot S_1$

y como el de la segunda debe ser el mismo, pues entonces:

$\Phi_2=\Phi_1=|\vec{E}|\cdot S_1=|\vec{E}|\cdot S_2\cdot\cos\alpha$

Debemos observar que el ángulo α es el que forman las dos superficies, pero también lo podemos ver como el ángulo que forma un vector normal a la superficie S_2 con el campo. Con lo cuál para calcular el flujo que atraviesa una superficie cuyo vector normal forma un ángulo α con el campo mediante la expresión:

$\Phi=|\vec{E}|\cdot S\cdot\cos\alpha$

expresión que se puede escribir de forma más compacta si definimos un vector que nos represente e la superficie, al que llamaremos vector superficie **S**, que tendrá como modulo la superficie real a la que representa y como dirección y sentidos los del vector normal a la superficie, con lo que la expresión anterior nos quedaría:

$\Phi=\vec{E}\cdot\mathbf{S}$ (producto escalar)

Al introducir el producto escalar acabamos de dar un signo al flujo. Si consideramos una superficie cerrada y tomamos como convenio que el vector superficie, además de ser normal a la superficie, tiene como sentido hacia afuera de la superficie cerrada, pueden ocurrir 2 casos para cada línea de fuerza:

- que entre en la superficie cerrada, en cuyo caso α será un ángulo del segundo cuadrante (90<α<180º), en cuyo caso el producto escalar será $|\vec{E}|\cdot S\cdot\cos\alpha<0$, es decir, *las líneas que entran en esa superficie contribuyen al flujo con un signo -.*
- Que salga de la superficie cerrada en cuyo caso α será un ángulo del primer cuadrante (0º<α<90º) , en cuyo caso el producto escalar será $|\vec{E}|\cdot S\cdot\cos\alpha>0$, es decir, *las líneas que salen de la superficie cerrada contribuyen al flujo con un signo +.*

Por lo tanto, para calcular el flujo a través de una superficie cerrada debemos tener en cuenta si entran o salen de la misma, definiendo el flujo como:

$\Phi=\Sigma$nº líneas que salen-Σnº líneas que entran

1.3. Flujo para un campo y una superficie cualquiera

Para calcular el flujo de un campo no uniforme a través de cualquier superficie haremos los siguiente: Dividiremos la superficie S en trozos infinitesimales, muy pequeños, hasta que no se cometa error apreciable al considerarlos planos. En estos trozos, de superficie dS (su vector superficie sería d**S**), como son tan pequeños, podemos admitir que el campo no varia dentro de cada uno (aunque sí varía de un dS a otro, por supuesto). Según eso, el flujo que atravesaría cada pequeño dS sería un pequeño flujo dΦ, cuyo valor vendría dado por la expresión anterior (al ser $\vec{E}$ constante dentro de ese dS):

$$d\Phi=\vec{E}\cdot\ d\vec{S}$$

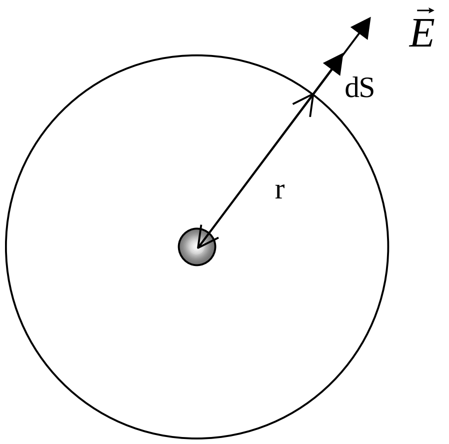
Para hallar el flujo total a través de toda la superficie debemos sumar todos los pequeños dΦ, es decir, hacer la integral de todos ellos, con lo que el flujo quedaría

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{E}\cdot\, d\vec{S}$$

extendiendose la integral a toda la superficie y siendo el vector $d\vec{S}$ un vector normal a la superficie en cada uno de sus puntos cuyo sentido se toma siempre *saliendo* desde el interior de la superficie hacia el exterior.

Esta es la formula más general para el cálculo del flujo de un campo vectorial, cambiando $\vec{E}$ por $\vec{g}$ si el campo es gravitatorio o por $\vec{B}$, como veremos mas adelante, si el campo es magnético.

Vamos a utilizar la última expresión deducida para calcular el flujo que atraviesa una superficie esférica en cuyo centro se encuentra una carga Q que produce un campo eléctrico a su alrededor. Teniendo en cuenta que podemos dividir la superficie esférica en pequeños trozos dS cuya normal será radial y por tanto tendrán el mismo sentido que el campo en cada punto (α=0), tendremos



$$\Phi = \int \vec{E}\cdot\, d\vec{S} = \int |\,\vec{E}\,|\, dS\cdot \cos\ 0 = |\,\vec{E}\,| \int dS = |\,\vec{E}\,|\cdot\ S$$

Notese que el módulo del campo eléctrico, como tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie, es constante y puede salir fuera de la integral y que la integral de dS, extendida a toda la superficie, es $S=4\pi r^2$. Teniendo en cuenta el resultado anterior podemos escribir

$$\Phi = |\,\vec{E}\,|\cdot\ S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

donde se ha escrito el valor del campo creado por la carga en el vacio de forma racionalizada y se ha simplificado. Observese que el signo del flujo coincide que el de la carga, lo que es totalmente lógico, ya que si la carga es positiva las lineas de campo salen de ella y la salir a traves de la superficie S su flujo sería *positivo*, mientras que si la carga Q es negativa las lineas entran en la esfera para dirigirse hacia la carga y el flujo sería *negativo.*

2. TEOREMA DE GAUSS

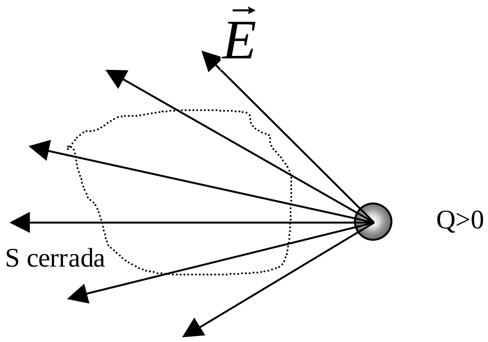
El resultado anterior es muy general: No cambiaría en nada si la superficie no fuese esférica (aunque sí que debe ser cerrada) o si la carga no estuviese en el centro, ya que el nº de lineas de campo que atravesarian la superficie serian las mismas. Dicho genralización es conocida en Física como **Teorema de Gauss**, en honor al matemático Friedrich Gauss (1777-1855). Su enunciado para el campo eléctrico es:

El flujo del vector campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es igual al la suma algebraica (teniendo en cuenta el signo) de las cargas interiores a dicha superficie dividido entre la constante dieléctrica del vacio.

$$\Phi = \frac{\sum Q(\text{interiores})}{\varepsilon_0}$$

Obsérvese que el teorema anterior vale para cualquier superficie cerrada, a la que se suele denominar superficie *gaussiana*, que sólo influyen en el cálculo del flujo las cargas interiores y que el Φ de un campo eléctrico puede ser positivo, 0 o negativo (según sea ΣQ).

¿Le encuentras alguna explicación al hecho de que las cargas exteriores no influyan en el valor del flujo a través de una superficie cerrada?. Es fácil de ver en el siguiente ejemplo, donde se han dibujado algunas líneas del campo creado por una carga positiva exterior a la superficie cerrada. Todas las líneas que entran a la superficie, por ser las líneas del campo eléctrico abiertas, deben salir de dicha superficie, por lo que se contarán, cuando entran con –1 y cuando salen con +1. En total, el flujo es igual al nº de líneas que salen - nº de líneas que entran=0.



Para el campo gravitatorio, el teorema de Gauss se enuncia de manera distinta, si tenemos en cuenta que si tratamos de calcular el flujo del campo gravitatorio generado por una masa M que atraviesa una esfera de radio r, en cuyo centro se encuentra dicha masa M, el resultado saldrá distinto al realizado con la carga eléctrica anteriormente. En este caso, el ángulo que forman $\vec{g}$ y d$\vec{S}$ es para todos los puntos de la esfera 180º, con lo que cosα=-1 y

$$\Phi = \int \vec{g}\cdot d\vec{S} = \int |\vec{g}|\, dS\cdot \cos\ 180^{o} = -|\vec{g}| \int dS = -|\vec{g}|\cdot S = -G\frac{M}{r^2}4\pi r^2 = -4\pi GM$$

Comprobándose que sale negativo, ya que las líneas de campo siempre entran en la superficie S dirigiéndose hacia la masa M. Este resultado se puede generalizar (Teorema de Gauss para el campo gravitatorio) como:
El flujo del vector campo gravitatoio que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es igual al producto -4πG por la suma de las masas interiores a dicha superficie

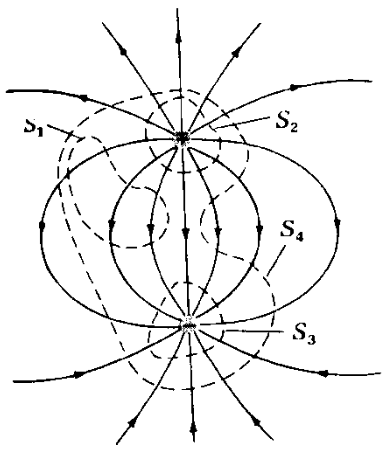
$$\Phi = -4\pi G \sum M(\text{interiores})$$

Ya estudiaremos más adelante el teorema de Gauss aplicado al campo magnético.
El teorema de Gauss se puede utilizar para calcular el campo eléctrico o gravitatorio creado por cargas o masas no puntuales que presenten una elevada simetría. Nosotros lo aplicaremos a fundamentalmente al estudio de varias cargas puntuales, las variaciones del campo gravitatorio terrestre con la altura y la profundidad (también con la latitud, ya que estamos estudiando g) y el campo creado por una esfera conductora.

3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL TEOREMA DE GAUSS:

3.1. FLUJO DEL CAMPO ELÉCTRICO EN VARIAS SITUACIONES:

Como ejemplo de aplicación del teorema de Gauss puedes ver cuanto valdría el flujo del campo eléctrico creado por dos cargas, una positiva Q_+=+2 C y otra negativa Q_-=-2 C. Como puedes ver, el flujo a través de las superficies S_1 y S_4 es cero, aunque por motivos distintos en cada caso: en el 1º porque no hay Q_{INT} y en el 2º porque la suma de las Q_{INT} vale 0. Puedes constatar gráficamente que entran tantas líneas como salen.
En cambio, para las superficie S_2 y S_3, el cálculo del flujo aplicando el teorema de Gauss nos da como resultado $2/\varepsilon_0$ en el primer caso y $-2/\varepsilon_0$ en el segundo, comprobándose gráficamente que a través de la superficie S_2 todas las líneas *salen* (por eso su Φ es positivo), mientras que a través de la S_3 todas las líneas *entran* (por eso su Φ es negativo)



3.2. CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UNA ESFERA CONDUCTORA

Podemos usar también el teorema de Gauss para calcular el valor del campo eléctrico en el interior y el exterior de una esfera conductora de radio R (Puede ser hueca o maciza, lo importante para lo que haremos a continuación es que sea conductora). Como sabemos, cuando existen cargas netas en una esfera conductora, como en ella se pueden mover las cargas con total libertad, debido a la repulsión eléctrica entre ellas se disponen lo mas lejos posibles una de otras, es decir, en la superficie de la esfera. Por tanto, en el interior no hay carga eléctrica neta. Si elegimos como superficie gaussiana una superficie cualquiera contenida dentro de la esfera, aplicando el teorema de Gauss llegaremos a la conclusión que el flujo que la atraviesa vale 0, pues la $Q_{INT}=0$ para todas ellas. Teniendo en cuenta la expresión matemática del flujo como integral, si vale cero para todas la superficies cerradas, sólo puede ser porque el campo eléctrico vale 0 (no puede ser **E** y d**S** perpendiculares para todas las superficies gaussianas imaginables). Sin embargo, en el exterior, como $Q_{INT}\neq 0$, pues el **E**$\neq 0$ también. Si suponemos, al igual que en los casos anteriores, que debido a la simetría de la disposición de la carga, **E** será radial y sólo función del radio y elegimos como gaussiana una esfera de radio r>R, operando llegaremos a:

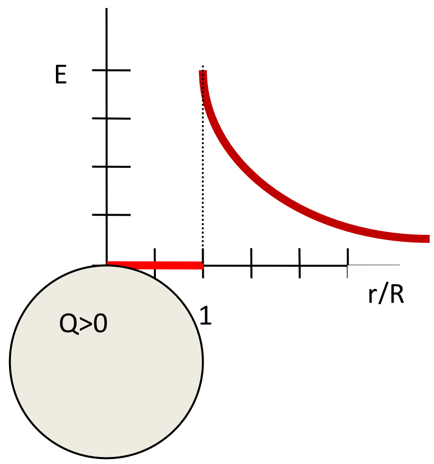
$$\Phi=\int \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int |\vec{E}|\cdot dS \text{ (por ser radial) } =|\vec{E}|\cdot\int dS \text{ (por ser cte en la esfera) } =|\vec{E}|\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}\text{ (T. Gauss)}$$

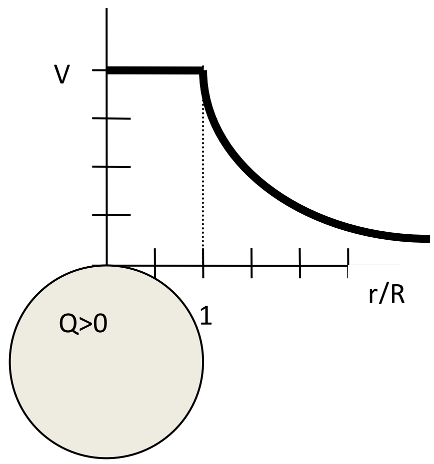
de donde se deduce que $|\vec{E}|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ para $r>R$, es decir, se obtiene el mismo resultado que se obtendría si la carga fuese puntual y se encontrase en el lugar que ocupa el centro de la esfera conductora.

Conociendo la relación entre el V y el **E** se puede averiguar el valor del potencial. En el interior de la esfera conductora, como **E**=0 en todos sus puntos, V (la menos integral de E) será constante (la de integración), y en el exterior, V=$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$. Teniendo en cuenta que la función potencial ha de ser continua, si sabemos que para el exterior vale $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ y para el interior es constante, el valor para el interior será V=$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$, siendo R el radio de la esfera.

Resumiendo: E y V **en esfera conductora** (maciza o hueca)

En el interior (r≤R)	En el exterior (r≥R)
E=0	E=$K\frac{Q}{r^2}$
V=**cte**= $K\frac{Q}{R^2}$	V= $K\frac{Q}{r}$





3.3. CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UNA ESFERA DIELÉCTRICA MACIZA

El campo y el potencial en el exterior de la esfera serán los mismo que antes, ya que si trazamos una superficie esférica gaussiana **concéntrica** de radio r>R de la esfera, toda la carga estará contenida en el interior de ella y valdrán los razonamientos anteriores (los de la esfera conductora, en la que las cargas se alojaban en la superficie=.

Lo que es distinto es lo que ocurre en el interior de la esfera, porque ahora no es cierto que la $Q_{interior}$=0, ya que al ser una esfera aislante la carga se queda donde se produce y la supondremos distribuidad uniformemente por toda ella.

Definiremos un concepto auxiliar, la denominada densidad de carga ρ, como

$$\rho = \frac{Q}{Volumen\, esfera} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Si tomamos una superficie gaussiana esférica **concéntrica** a la esfera aislante (sus centros coinciden) de radio r<R, la $Q_{interior}$ será

$$Q_{interior} = \rho \cdot V_{interior} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Si aplicamos la ley de Gauss asumiendo, como siempre, que la simetría de la situación hará que podamos suponer que el campo será radial, constante en módulo a lo largo de la superficie gaussiana de intergración y perpendicular a dS en todos los puntos de la Gaussiana tendremos:

$$|\vec{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}. Despejando\ |E| = K_0\frac{Q}{R^3}r$$

Es decir, el campo en el interior de la esfera crece con r desde r=0 (E=0) hasta r=R (E=$K_0\frac{Q}{R^2}$) en donde "empalma" el decrecimiento del E con r^2 a partir de ese momento (es decir, E=$K\frac{Q}{r^2}$) como si toda la carga se encontrase en el centro de la esfera.

El potencial lo podemos hallar mediante la expresión:

V=$-\int Edr$

En el segundo caso nos saldrá la expresión conocida para una carga puntual

V= $K\frac{Q}{r}$

y para el primero

V=$-K_0\frac{Q}{R^3}\frac{r^2}{2} + C$

Para calcular dicha constante de integración debemos tener en cuenta las condiciones de contorno, es decir, el valor de V para r=R, que es $K_0\frac{Q}{R}$. Por lo tanto

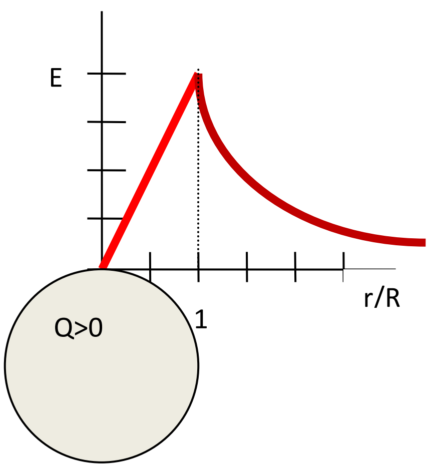
$$-K_0\frac{Q}{R^3}\frac{R^2}{2} + C = K_0\frac{Q}{R}\ o\ lo\ que\ es\ lo\ mismo\ C = \frac{3}{2}K_0\frac{Q}{R}$$

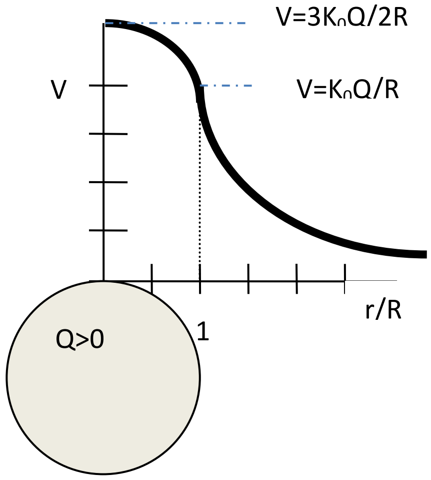
Si sustituimos el valor de la C hallado en la primera expresión nos quedará:

$$V = K_0\frac{Q}{2R^3}(3R^2 - r^2)$$

Resumiendo, como en el caso anterior.

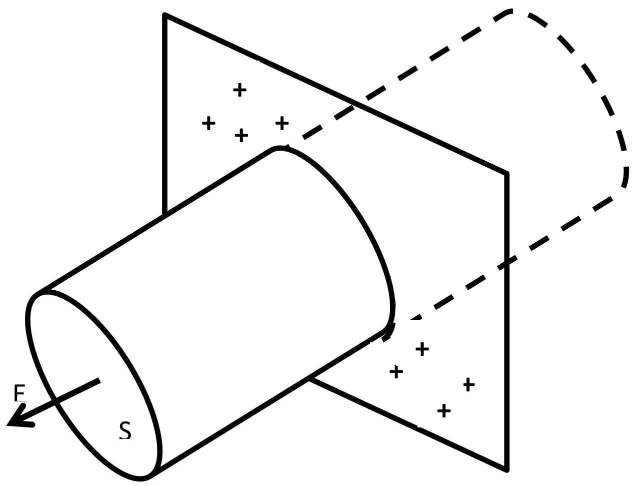
En el interior (r≤R)	En el exterior (r≥R)
E= $K\frac{Q}{R^3}r$	E=$K\frac{Q}{r^2}$
V=$K_0\frac{Q}{2R^3}(3R^2 - r^2)$	V= $K\frac{Q}{r}$





3.4. CAMPO CREADO POR UN PLANO INFINITO CARGADO UNIFORMEMENTE

Es una situación que tiene un especial interés en física porque, como veremos en el resultado, es una de las maneras de conseguir un campo eléctrico uniforme. De hecho, se suelen usar 2 placas paralelas (evidentemente en la práctica se usan placas finitas, de limitadas, no de espesor) cargadas con cargas de distinto signo (uniendo cada placa a un polo de una batería, por ejemplo).



Por la simetría del problema parece razonable que podemos suponer que el campo eléctrico producido por la placa será perpendicular a la misma (al ser infinita, todas las contribuciones de cargas elementales tendrán su simétrico tal que sólo quedará, al sumar esos campos puntuales, la componente perpendicular). También parece razonable suponer que dependerá de la distancia al plano. Por tanto, si nos planteamos calcular el flujo a través de un cilindro colocado perpendicularmente al plano, tal y como se ve en la figura, el flujo a través de las 2 caras (la cara S que se ve y su opuesta) será

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E\, dS = E \int dS = 2ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

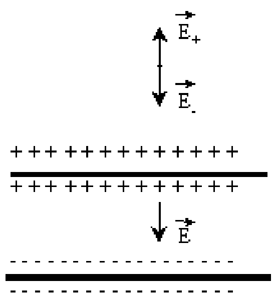
(Obsérvese que al ser el campo perpendicular no hay flujo por las paredes del cilindro y que el módulo de E puede salir de la integral al ser constante en la superficie de integración)

Definiremos, como en el caso de la esfera, un concepto auxiliar interesante, la densidad superficial de carga, σ (sigma) como la carga total partido por la superficie σ=Q/(Área total de la placa), por lo que para calcular Q, la carga interior al cilindro, sería Q= σS. Si sustituimos en la expresión anterior y despejamos E:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 2\pi K_0 \sigma = cte$$

Vemos que el campo eléctrico es constante y que no depende de la distancia. Las líneas de fuerza serán rectas perpendiculares al plano y uniformemente espaciadas.

Si se trata de 2 placas cargadas infinitas con cargas +Q y –Q y separadas a una cierta distancia, aplicando el resultado anterior, tenemos que el campo eléctrico fuera del espacio de las 2 placas es 0, puesto que los 2 campos que producen cada una son opuestos (de igual módulo $\sigma/2\varepsilon_0$, dirección y sentidos opuestos), mientras que en el espacio entre ambas se refuerzan, haciendo que el campo total sea



$$E = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = cte$$

3.5. CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UN HILO INFINITO

Sea un hilo conductor infinitamente largo, cuya densidad lineal de carga (carga por unidad de longitud) designaremos por λ. Para calcular el campo creado por este conductor a una distancia r de él vamos a construir una superficie gaussiana de forma cilíndrica, concéntrica on el hilo, de radio r y de altura unidad. La carga contenido dentro de esa superficie será $\lambda \cdot 1 = \lambda$ y, como parece razonable que supongamos que el campo eléctrico es radial y sólo función de r, podremos, como en el caso anterior, sacarlo de la integral (al ser constante en toda la superficie de integración). Obtendríamos aplicando el teorema de Gauss:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E\, dS = E\int dS = E 2\pi r \cdot 1 = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

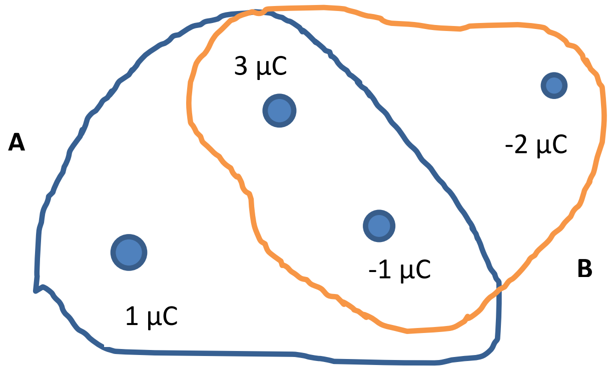
De donde

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

3.6. Problemas de aplicación de lo anterior:

1. Demuestra la ley de Coulomb a partir del teorema de Gauss aplicado a una carga puntual.

2. En una distribución de cargas como la que se presenta a continuación indicar el flujo de campo eléctrico a través de la superficie cerrada A y el flojo de campo eléctrico a través de la superficie cerrada B.



3. a) Enuncia el teorema de Gauss

b) Una carga eléctrica puntual de 2 μC se encuentra situada en el centro geométrico de un cubo de 2 m de arista. El medio es el vacío. Calcula el flujo eléctrico a través de la superficie cúbica.

($\varepsilon_0 = 8'85 \cdot 10^{-12}\ C^2m^{-2}N^{-1}$, $1\mu C = 10^{-6}\ C$)

4. Dos esferas conductoras aisladas, de 12 y 20 cm de radio, se encuentran en una zona del espacio vacío y con sus centros separados 10 m, están cargadas cada una con una carga de $25\cdot 10^{-9}$ C. Las cargas se ponen en contacto mediante un hilo conductor y se alcanza una situación de equilibrio. Calcula:

a) ¿Qué fuerza se ejercen entre sí ambas esferas cuando están aisladas?
b) El potencial al que se encuentra cada una de las esferas antes de ponerlas en contacto.
c) La carga y el potencial de cada esfera cuando, una vez conectadas, se establece el equilibrio.

Dato: $k = 9'00\cdot 10^9\ N\,m^2C^{-2}$

3.7. VARIACION DE g CON LA ALTURA

Calculemos cuanto vale el flujo que atraviesa una superficie esférica gaussiana S debido al campo creado por la tierra. Si admitimos como suposiciones razonables que debido a la simetría el campo será radial y su sentido será apuntando hacia el centro de la tierra y suponemos además que su módulo será constante a lo largo de toda la superficie S (admitimos, por tanto, que g sólo dependerá de r y por tanto tendrá igual valor en todos los puntos de la esfera, ya que r=cte), entonces aplicando el teorema de Gauss obtenemos

$$\Phi = \int \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int |\vec{g}| \cdot dS \cdot \cos 180^{\circ} \text{ (por ser radial)} = -|\vec{g}| \cdot S \text{ (por ser cte)} = -|\vec{g}| \cdot 4\pi R^2$$

y teniendo en cuenta el teorema de Gauss, es decir, sabiendo que el $\Phi=-4\pi GM_T$, podemos hallar el valor de g (su módulo) como

$$g = G\frac{M_T}{R^2} = g_0 \frac{R_T^2}{R^2} = g_0 \left(\frac{R_T}{R}\right)^2 = \frac{cte}{R^2}$$

lo que nos indica dos hechos: a) que hemos obtenido el mismo resultado que si hubiésemos supuesto que toda la masa de la tierra estaba concentrada en su centro, es decir, si la hubiésemos tratado a la tierra como una masa puntual. b) que el valor de la g disminuye con R^2, siendo igual a g_0 si $R=R_T$ (h=0) e igual a $g_0/4$ si $R=2R_T$ ($h=R_T$).

3.8. VARIACION DE g CON LA PROFUNDIDAD

En este caso calcularemos cuál es el flujo de campo gravitatorio que atraviesa una esfera de radio R, siendo $R<R_T$, haciendo las mismas suposiciones que en el caso anterior (g radial y hacia el centro de la tierra y g función sólo de r).

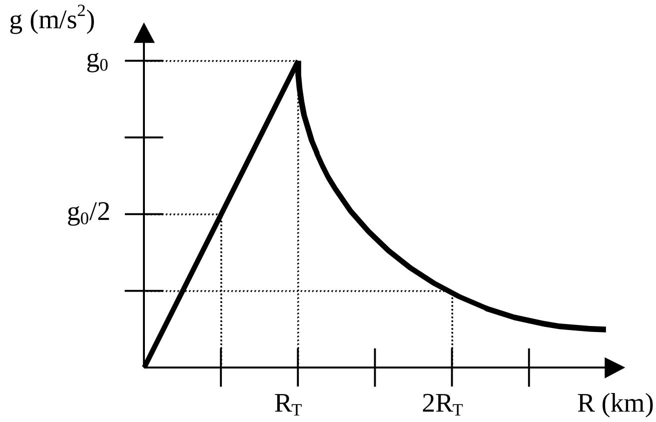
$$\Phi = \int \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int |\vec{g}| \cdot dS \cdot \cos 180^{\circ} \text{ (por ser radial)} = -|\vec{g}| \cdot S \text{ (por ser cte)} = -|\vec{g}| \cdot 4\pi R^2$$

Teniendo en cuenta que dicho flujo puede hallarse también aplicando el teorema de Gauss, $\Phi=-4\pi GM_{INT}$, siendo M_{INT} la masa terrestre que se encuentra en el interior de la superficie gaussiana. Podemos calcular dicha masa usando el concepto de densidad $M_{INT} = d_T \cdot V_{INT} = \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = M_T \dfrac{R^3}{R^3}$, siendo

d_T la densidad terrestre y V_{INT} el volumen interior de la esfera a través de la cuál estamos calculando el flujo. Igualando los dos valores para el flujo y utilizando la relación $g_0 = G\dfrac{M_T}{R_T^2}$ nos queda

$$|\vec{g}| = \frac{4\pi G M_T \frac{R^3}{R_T^3}}{4\pi R^2} = G\frac{M_T R}{R_T^3} = g_0 \frac{R}{R_T}$$

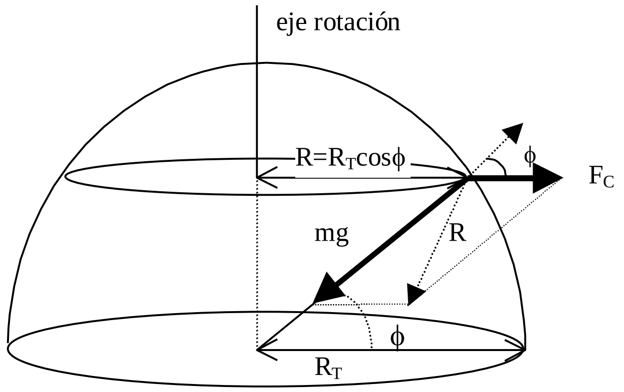
que nos indica que el valor de g disminuye linealmente a medida que nos acercamos al centro de la tierra (R disminuye) siendo cero en el mismo (la ingravidez real). Podemos comprobar que la ecuación obtenida anteriormente es exacta si nos fijamos que para $R=R_T$, el valor de g es g_0 . Podemos representar como varia el campo gravitatorio dentro y fuera de la corteza terrestre utilizando las dos funciones anteriores:



$$g(R)=\begin{cases} g_0\dfrac{R}{R_T} \text{ si R} \leq \text{R}_\text{T} \\ g_0\dfrac{R_T^2}{R^2} \text{ si R} \geq \text{R}_T \end{cases}$$

3.9. VARIACION DE g CON LA LATITUD

Completamos el estudio de la gravedad terrestre estudiando como varia ésta con la latitud. Aunque para ello no utilizaremos el teorema de Gauss, por no ser necesario, se hace aquí por dar continuidad al tema.
La latitud de un punto es el ángulo que forma el radiovector que va desde el centro de la tierra a dicho punto de la superficie con el plano del ecuador (éste último es el plano perpendicular al eje de rotación imaginario que pasaría por el centro de la tierra). La representaremos por ϕ, tal y como se indica en la siguiente figura.



Si usamos como sistema de referencia dicho punto de la Tierra (como se encuentra girando, es un sistema no inercial, SRNI), tendremos que sobre un cuerpo de masa m situado en dicho punto actuarían 2 fuerzas:

- la real, el peso, mg, dirigida hacia el centro de la Tierra
- y la ficticia, la fuerza centrífuga, mv^2/R, dirigida hacia el exterior del giro.

la resultante de ambas fuerzas **R** no apunta hacia el centro de la Tierra. Vamos a tratar de hallar la componente de dicha resultante **R** dirigida hacia el centro terrestre. Para ello, descomponemos la fuerza centrifuga en 2 componentes, interesándonos sólo la componente contenida en la dirección del peso, tal y como se indica en la figura anterior.
Eje X en sentido radial y positivo hacia el centro

$$R_x=mg-F_c\cos\phi=mg-m\omega^2R\cos\phi=m(g-\omega^2R_T\cos^2\phi)$$

donde hemos tenido en cuenta que $R=R_T\cos\phi$. ¿Cuál será la aceleración efectiva, g_{ef}, que sentirá dicho cuerpo de atracción hacia el centro de la tierra?. La podemos obtener igualando

$$R_x=ma_{ef}=mg_{ef}$$
$$m(g-\omega^2R_T\cos^2\phi)=mg_{ef}$$
$$g_{ef}=g-\omega^2R_T\cos^2\phi$$

A medida que nos alejamos del ecuador, aumenta la latitud ϕ, el $\cos\phi$ disminuye (no olvidar que el coseno es una función decreciente en el primer cuadrante) y como está restando, la "gravedad" que nosotros sentimos (la atracción gravitatoria real menos la componente radial de la fuerza centrífuga) aumenta. g_{ef} tendrá su valor **máximo** en los polos (en ellos, como ϕ=90º, cos90º=0 y $\mathbf{g_{ef}=g}$, componente gravitatoria exclusivamente) y el **mínimo** en el ecuador (donde ϕ=0º, cos0º=1 y $\mathbf{g_{ef}=g-\omega^2R_T}$). La diferencia entre los valores máximos y mínimos de la "gravedad" es el término ω^2R_T, cuyo valor es 0,034 m/s^2. Nota:$\omega=2\pi/T$, siendo T=24·60·60 s y $R_T=6{,}37\cdot10^6$ m.

¿Coincidirá nuestro estudio teórico con el experimental?. Los valores de "g" medidos experimentalmente son los siguientes (Fuente: "Berkeley Physics course", Tomo I, mecánica, pag. 59):

Lugar	Latitud	Valor de "g" (m/s^2)
Polo Norte	90º N	9,8325
Reykiavik (Islandia)	64º N	9,8227

París (Francia)	49º N	9,8094
Monrovia (Liberia)	6º N	9,7816

La diferencia entre los valores máximos y mínimos es 0,052 m/s^2, mayor que la teórica. La explicación a esta diferencia se encuentra en la forma elipsoidal de la Tierra, que hace que se encuentre más achatada por el polo con lo que la componente gravitatoria de g_{ef} es mayor en el polo que en el ecuador.

Como resumen podemos afirmar que, debido a la rotación terrestre, la fuerza efectiva que se hace sobre cada cuerpo no es el peso, sino el peso menos la fuerza centrífuga (visto desde el SRNI que es cada punto de la tierra). Por tanto, la aceleración hacia su centro, g_{ef}, se puede hallar de manera aproximada como

$$g_{ef}=g_{grav}- 0,034\cdot\cos^2\phi$$

donde como aproximación podemos tomar la g_{grav} como constante e igual a la del polo, 9,83 m/s^2.