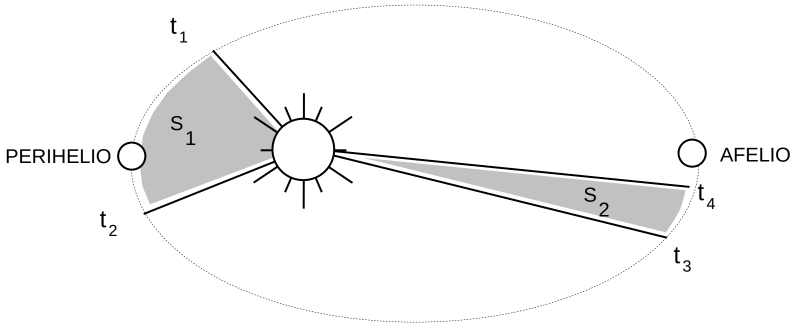
Campo Gravitatorio.

1 LEYES DE KEPLER

1) **La primera ley de Kepler o ley de las órbitas** establece que los planetas describen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se halla el Sol.

2) Según la **segunda ley de Kepler o ley de las Áreas**, el vector de posición que une los centros del Sol y del planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales (velocidad areolar constante). La ley es válida para todas las fuerzas centrales, y se debe a que el momento angular se conserva en este tipo de fuerzas.

$r_1 \cdot m \cdot v_1 = r_2 \cdot m \cdot v_2 \quad r_1 v_1 = r_2 v_2$



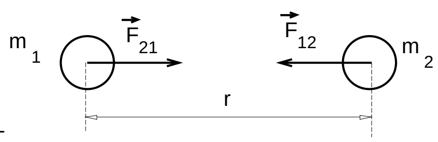
Si el tiempo transcurrido es el mismo $t_2-t_1=t_4-t_3$ las superficies S_1 y S_2 son iguales. Esto significa que el movimiento es más rápido en los puntos más próximos al Sol (Perihelio: punto más próximo). La velocidad es menor en los puntos más lejanos (Zona del afelio: punto más alejado).

3) La **tercera ley de Kepler o ley de los periodos de revolución** establece que los cuadrados de los tiempos empleados por los planetas en su movimiento de revolución son proporcionales a los cubos de la distancia media del planeta al Sol (El radio medio de una órbita se define como la media entre la distancia máxima y mínima del planeta al Sol, es decir, $r_m=(r_{afelio}+ r_{perihelio})/2$. Teniendo en cuenta las propiedades de una elipse, $r_{afelio}=a+c$ y la $r_{perihelio}=a-c$, con lo que $r_m=a$, el semieje mayor. Por tanto, también se puede enunciar esta tercera le diciendo que el cuadrado del período de rotación es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita. Si la órbita es circular el radio medio es el radio de la órbita).

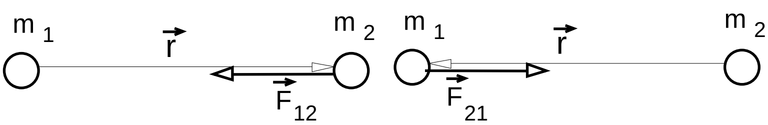
$T^2=k \cdot r^3_m$

2 LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$



$$\vec{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\,\vec{u}_r$$



El signo - se debe a que el sentido de la fuerza es contrario al del vector de posición, (u_r es un vector unitario en esa dirección). G es la constante de gravitación universal.

3 MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

$$\boxed{\vec{L}_0=\overrightarrow{OA}\times m\vec{v}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

Variación de $\vec{L}$ con el tiempo

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times (\Sigma\vec{F})$$

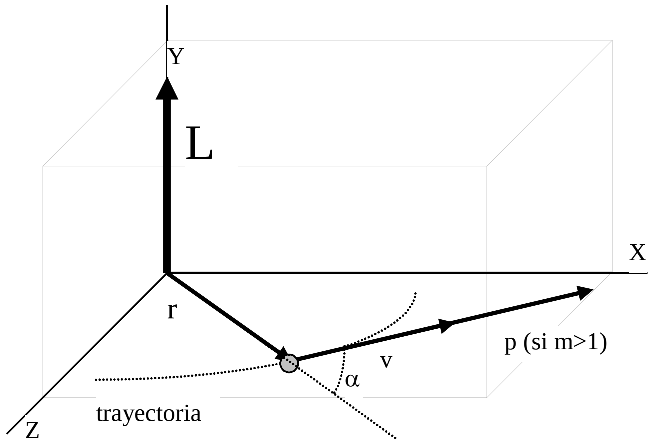
Como $\vec{v}$ y $\vec{p}$ son paralelos ($\vec{p}$ =m$\vec{v}$ **)** su producto vectorial será 0 (α=0).

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times (\Sigma\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{R}}$$

El segundo término es el momento de la fuerza resultante aplicada con respecto al mismo punto y se le denomina **momento de una fuerza,** $\vec{M}_0$ ($\vec{R}$).

3.1 Fuerzas centrales

Si $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son siempre paralelos o antiparalelos (α=0º o 180º), entonces $\vec{M}$=0 y $\vec{L}$=cte. La dirección de la fuerza siempre debe pasar siempre por un punto, al que tomaremos como origen O para calcular $\vec{L}$ y $\vec{M}$**.** Las fuerzas que apuntan siempre hacia el mismo punto se denominan en Física **Fuerzas Centrales**. Son, por ejemplo, la fuerza eléctrica o la gravitatoria, en el caso de fuerzas fundamentales, o la tensión T de una cuerda. El punto al que apunta siempre una fuerza central se denomina **centro de fuerza**. Acabamos de estudiar que: "cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza central, su momento angular $\vec{L}$ con respecto al centro de fuerza permanece constante".



4 CAMPOS VECTORIALES: CAMPO GRAVITATORIO

Decimos que hay un <u>**campo**</u> en una región del espacio cuando existe una magnitud física que toma <u>**un valor único**</u> en cada punto de dicha región. A dicha magnitud se la denomina <u>**intensidad de campo**</u> (la tendencia actual, que seguiremos aquí, es denominar campo tanto a la región del espacio como a la magnitud misma).

El campo gravitatorio es una campo vectorial que se define para cada punto del espacio como la fuerza gravitatoria por unidad de masa situada en ese punto del espacio. Se le designa por la letra g

DEFINICIÓN DE CAMPO EN FUNCIÓN DE LA MASA QUE SUFRE EL CAMPO (m)	DEFINICIÓN DE CAMPO EN FUNCIÓN DE LA MASA QUE CREA EL CAMPO (M)
$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}}$ Si el campo lo crea una sola masa$\rightarrow$	$\vec{g} = \frac{1}{\cancel{m}}(-G\frac{\cancel{m} \bullet M}{r^2})\vec{u}_r$ $\boxed{\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r}$

En el sistema internacional se expresa en: [g]=N/Kg

Campo gravitatorio cerca de la Tierra

En las expresiones que hemos obtenido, la masa M representa al cuerpo que origina el campo gravitatorio. La masa m es la que se encuentra en el seno del campo gravitatorio.

Si nos referimos al campo gravitatorio en la superficie terrestre:

$$\vec{g}_{0T} = -G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}_r; g_{0T} = G\frac{M_T}{R_T^2}; 9{,}8 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

El **principio de superposición** afirma que cuando en un punto del espacio actúan dos o más campos , el campo resultante se obtiene sumando vectorialmente los campos que actúan. Esto equivale a decir que los campos son independientes entre sí, o sea, no se modifican mutuamente, sino que se acumulan.

Representación del campo gravitatorio

La representación de un campo vectorial se hace mediante las líneas de campo (también llamadas lineas de fuerza), que tienen la característica de ser **tangentes al vector campo en cada punto** y de su mismo sentido. Las líneas de campo se dibujan más juntas en zonas donde el campo es más intenso y más separadas en zonas de menor intensidad (menor módulo)[1] . Las líneas de campo **no se cortan** unas a otras en ningún punto del espacio (salvo donde esté situado el centro de una masa), ya que de hacerlo existirían dos tangentes distintas en el punto de corte, una para cada línea de campo, y por tanto dos posibles valores del campo, en contradicción con la definición de campo vista anteriormente (un valor para cada punto). En la figura adjunta se da la representación del campo gravitatorio en las proximidades de la Tierra.

5 TRABAJO Y ENERGÍA

- Si $\vec{F}$ es cte y paralela al desplazamiento Δs se define trabajo, W:

W=F·Δs

Esta fórmula tan sencilla ya nos permite definir la unidad de trabajo del SI como el Joule (Julio, J), definido como el trabajo realizado por una fuerza de 1 N cuando actúa a lo largo de 1 m en su misma dirección y sentido

- Si la fuerza es constante, pero forma un determinado ángulo con el desplazamiento Δs,

$$W = F_x \Delta x = \left|\vec{F}\right| \Delta s \cos\alpha = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

- Si la fuerza no es constante se puede ampliar

$$W = \int_A^B F_x dx = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Para calcular el W_{total} o W_{neto} realizado sobre un cuerpo, podemos hallar la resultante de todas las fuerzas y a partir de ahí el W o bien los W individuales de cada fuerza y luego sumarlos.

Recordamos también el teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética: El trabajo total realizado sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética

$$W = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Recordemos también la definición de **fuerza conservativa**:

- Una fuerza es conservativa cuando el trabajo realizado por ella sobre un cuerpo que se desplaza de A a B no depende del camino seguido, sino sólo de las posiciones inicial y final.
- Se puede definir también, de acuerdo con lo anterior, como aquella que al hacer un ciclo cerrado cualquiera realiza un trabajo nulo.

Todas las fuerzas centrales son conservativas: la fuerza eléctrica, la gravitatoria, la elástica.

No son conservativas: el rozamiento, la fuerza de unos motores a reacción, etc.

Cuando una fuerza es conservativa podemos encontrar existía una función, relacionada con el tipo de fuerza y denominada energía potencia, E_p, de tal manera que el trabajo de la fuerza conservativa asociada es:

$$W_{F.conservativa} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_p(A) - E_P(B), de\ donde\ \boldsymbol{E_p} = -\int \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathbf{d}\vec{\boldsymbol{r}}$$

- Si sólo actúan fuerzas conservativas, como $W_{neto}=W_{F\ .conservativas} \rightarrow \Delta E_C = -\Delta E_p$; $\Delta(E_c+E_p)=0$; $\boxed{\Delta E_{mecánica}=0}$ **(Teorema de conservación de la energía mecánica)**. De ahí el nombre de estas fuerzas.
- Si además de conservativas hay fuerzas no conservativas deberemos calcular el trabajo que hacen estas últimas mediante $W_{neto}=W_{F\ .conservativas} + W_{F.\ no\ conservativas} \rightarrow \Delta E_C = -\Delta E_p + W_{F.\ no\ conservativas}$; $\Delta(E_c+E_p) = W_{F.\ no\ conservativas}$; $\boxed{\Delta E_{mecánica} = W_{F.\ no\ conservativas}}$. La energía mecánica no se conserva y su variación coincide con el $W_{F.\ no\ conservativas}$.

6 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

$\boxed{E_{pot} = \frac{-GmM}{r}}$ Se halla haciendo la integral de $-G\frac{Mm}{r}d$r y cambiándole de signo. Ya no es necesario que hagamos la integral más veces, pues el W de la F. gravitatoria lo calcularemos como E_p (A) – E_p(B)

[1] De hecho, se utiliza el convenio de pintar las lineas de campo de tal manera que el nº de ellas que atraviesan la unidad de superficie colocada en un punto perpendicularmente a las lineas coincida con el valor del campo en dicho punto.

POTENCIAL GRAVITATORIO.

El potencial gravitatorio es una magnitud escalar que se define en cada punto del espacio como la energía potencial gravitatoria por unidad de masa situada en ese punto.

$$V_g = \frac{E_p(grav)}{m}$$ (m: masa que soporta el campo).

Si el campo lo crea una sola masa

$$V_g = -G\frac{mM}{r} \bullet \frac{1}{m} = -G\frac{M}{r}$$ (M:masa que origina el campo)

Las unidades en que se mide el potencial son J/Kg en el Sistema Internacional.

El campo gravitatorio, se puede representar también mediante las líneas equipotenciales (unen puntos de igual potencial). Estas líneas son perpendiculares en cada punto del espacio a las líneas de campo, pero el manejo es más sencillo, puesto que el potencial es una magnitud escalar.

Por último podemos señalar que la misma relación que hay entre energía potencial y fuerza existe entre campo gravitatorio y potencial, pues, al fin y al cabo, esto últimos son los primeros por unidad de masa. Recordando la relación vistan en el tema de W y E, podemos escribir $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r$. Si dividimos en ambos miembros de la igualdad por m y, como es constante, la introducimos dentro de la derivada del 2º miembro nos queda $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{d(\frac{E_p}{m})}{dr}\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$, pudiendo obtener las mismas conclusiones que obtuvimos en el tema de W yE, pero referidas a la relación campo-potencial. Así, si tenemos una gráfica de la función potencial, el valor del campo en cada punto coincidirá con la pendiente de la curva de potencial en dicho punto. El signo menos nos indica, como entonces, que el campo se opone al crecimiento del potencial, o dicho de otra manera, el campo siempre apunta hacia las zonas de menor potencial. Movimiento de satélites y planetas en campos gravitatorios.

7 SISTEMAS LIBRES Y SISTEMAS LIGADOS.

a) **VELOCIDAD DE ESCAPE**, es la **velocidad mínima** que debe llevar un cuerpo en un punto determinado para que consiga escapar de la atracción de otro. El caso más típico es el del lanzamiento de un cohete (sin propulsión, o sea sin motores para que se conserve la E_m) desde la tierra. (Su $E_{mecánica}$ debe ser =0)

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \left(-G\frac{\cancel{m}M}{r}\right) = 0 \quad ; v^2 = \frac{2GM}{r} \quad \boxed{v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

b) Satélites:

$$F_g = m \cdot a_N \quad ; G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \quad ; v_{orb}^2 = \frac{GM}{r}$$ luego $$\boxed{v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

El periodo del movimiento circular sería:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$ Elevando al cuadrado $$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$ (3ª ley de Kepler)

La E_{mec} en este caso valdría $E_{mec}= E_{cin} + E_{pot}$; $E_{MEC} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{mM}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{r}\right) - G\frac{mM}{r} = \frac{GmM}{2r} - \frac{GmM}{r}$

Es decir $\boxed{E_{MEC} = -G\frac{mM}{2r}}$, o sea $E_{mec}<0$. La energía mecánica es **negativa**. A la energía mínima que hay que aportar a un sistema ligado para que se convierta en libre (por tanto, para que llegue a E_m=0) se denomina **ENERGÍA DE ENLACE**. Observa que la energía de enlace es la que hay que aportar y por tanto es positiva coincidiendo para los sistemas enlazados con $|E_m|$.