Campo Gravitatorio.

Tabla de contenido

1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.

Sistema Geocéntrico

Las primeras teorías sobre la estructura del sistema solar suponían que la Tierra se encuentra situada en el centro de un sistema alrededor del cual se mueven los planetas, incluyendo entre ellos el Sol y la Luna. Básicamente existieron dos sistemas de este tipo, el de Tolomeo y el de Tycho Brahe.

El primero, formulado por el astrónomo alejandrino Tolomeo en el s. II d.C., suponía que la Tierra se encontraba inmóvil en el centro del universo y que a su alrededor giraban los planetas, incluidos el Sol y la Luna, describiendo órbitas circulares (epiciclos) con movimiento uniforme. A su vez, los centros de dichas órbitas recorrían, también con movimiento uniforme, otras circunferencias (deferentes) alrededor de la Tierra.

El segundo modelo, formulado por el astrónomo danés Tycho Brahe en 1577, consideraba que la Tierra se encontraba fija en el centro del universo y que alrededor de ella giraban la Luna y el Sol. Sin embargo, en este modelo los planetas no giraban alrededor de la Tierra sino que lo hacían alrededor del Sol. **Tycho Brahe (Knudstrup, 1546-Praga, 1601)** Astrónomo danés. Construyó y dirigió los observatorios de Uraniborg y Stelborg,

Sistema Heliocéntrico

Modelo del sistema solar y, en épocas antiguas, por extensión, de la totalidad del universo, basado en la hipótesis de que el Sol se encuentra situado en el centro del sistema y de que los planetas, incluida la Tierra, giran en torno a él.

El sistema heliocéntrico por excelencia es el correspondiente al modelo del universo formulado por N. Copérnico en 1543.

Copérnico, Nicolás (Torun, 1473-Frauenburg, 1543) Astrónomo polaco. Estudió leyes, lenguas clásicas y astronomía en las universidades de Cracovia, Bolonia y Padua. Sus estudios de astronomía le permitieron concebir la teoría del sistema heliocéntrico, que formuló como hipótesis en su libro «Sobre las revoluciones de los orbes celestes» (1543). Su teoría fue confirmada con posterioridad gracias a las observaciones de Galileo y corroborada por los cálculos de Kepler. Fue el primero en formular coherentemente el movimiento de la Tierra y los planetas en torno al Sol. Hacia 1507 elaboró su primera exposición de un sistema astronómico heliocéntrico con la Tierra girando en torno al Sol, que tuvo una divulgación limitada entre los estudiosos de la astronomía y le forjó una reputación entre ellos; fue invitado a participar en la reforma del calendario juliano y, en 1533, sus enseñanzas fueron expuestas ante el papa Clemente VII, siendo urgido tres años más tarde por el cardenal Schönberg a que hiciera públicos sus descubrimientos. Por entonces, Copérnico había completado ya la redacción de su gran obra, «Sobre las revoluciones de los orbes celestes», un tratado astronómico basado en la hipótesis heliocéntrica. Consciente de la novedad de sus ideas y temeroso de las críticas que podían suscitar, no lo dio a la imprenta. La publicación se produjo por la intervención de un astrónomo protestante, Georg Joachim von Lauchen, conocido como Rheticus, que visitó a Copérnico de 1539 a 1541 y lo convenció de la necesidad de imprimir el tratado, encargándose de ello. La obra apareció en 1543, precedida por un prefacio anónimo, donde el sistema copernicano se presentaba como una hipótesis de carácter meramente formal contra lo que fue el convencimiento del propio Copérnico.

La defensa pública de este modelo provocó las desavenencias entre la iglesia católica y Galileo Galilei, que acabarían con el arresto domiciliario de éste hasta el fin de sus días y con la firma por él de un documento en el que se retractaba de las enseñanzas impartidas a la vez que reconocía públicamente la inmovilidad de la Tierra y que el Sol giraba en torno a ella, es decir, el sistema geocéntrico.

Galileo Galilei (Pisa, 1564-Arcetri, 1642). Astrónomo y físico italiano. En 1589 fue nombrado profesor en el Estudio de Pisa, donde compuso un texto sobre el movimiento, en el que criticaba las explicaciones aristotélicas sobre la caída de los cuerpos y el movimiento de los proyectiles. En 1592 fue elegido profesor de matemáticas en la Universidad de Padua, donde se ocupó de asuntos técnicos como la arquitectura militar y la topografía. En 1609 transformó un anteojo fabricado en Holanda, hasta convertirlo en un auténtico telescopio, con el que observó que la Luna no era una esfera perfecta, como se deduciría de las teorías de Aristóteles, sino un lugar con montañas y cráteres. Descubrió cuatro satélites que giraban alrededor de Júpiter, poniendo en duda la afirmación de que la Tierra era el centro de todos los movimientos celestes, y reforzando la teoría heliocéntrica de Copérnico. Expuso sus observaciones en el texto «Sidereus nuncius» (1610). En 1632 consiguió el *imprimatur* (permiso eclesiástico de impresión) para su obra «Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano», a pesar de lo cual fue sometido a proceso eclesiástico en 1633 por defender la teoría heliocéntrica y condenado a reclusión perpetua. Obligado a retractarse de sus creencias, se le atribuye la célebre frase «Eppur si muove» («sin embargo, se mueve»). Escribió asimismo «Discorsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze» (1636).

Kepler, Johannes (Weil, 1571-Ratisbona, 1630) Astrónomo alemán. A partir de 1600 se dedicó a la astronomía como ayudante de Tycho Brahe, a quien sucedió como astrónomo y matemático de la corte del emperador Rodolfo II, en Praga. Entre los años 1605 y 1619 basándose en los datos de las meticulosas observaciones de Tycho, formuló las tres leyes del movimiento planetario que llevan su nombre, y que permiten la exacta especificación matemática de las trayectorias descritas por los planetas. También formuló algunas leyes ópticas y en 1611 construyó un telescopio. Defendió en diversas obras la visión heliocéntrica sostenida por Copérnico.

Gravitación

La gravitación es la fuerza de atracción mutua que experimentan los cuerpos por el hecho de tener una masa determinada. La existencia de dicha fuerza fue establecida por el matemático y físico inglés **Isaac Newton (Woolsthorpe, Lincolnshire, 1642-Londres, 1727)**, apareciendo en su obra principal «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica», «Principios matemáticos de la filosofía natural» (1687). A partir de la ley de la gravitación universal es posible deducir las leyes de Kepler.

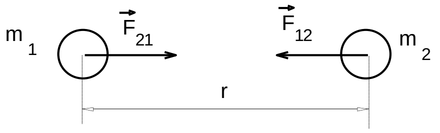
Teoría de la Relatividad

Conjunto de planteamientos teóricos elaborados por **A. Einstein (Ulm, 1879-Princeton, 1955)** entre 1905 y 1912 para explicar, inicialmente, los problemas derivados de la invariancia de la velocidad de la luz en el estudio de los sistemas en movimiento relativo. La teoría de la relatividad general es una ampliación del concepto restringido al caso de sistemas en movimiento acelerado, y parte del principio de equivalencia entre los conceptos de masa gravitatoria y masa inerte, que implica, entre otras cosas, la interacción gravitatoria entre masa y radiación y la equivalencia entre masa y energía. La teoría de la relatividad general amplía la ley de gravitación, explicando las interacciones como curvatura geométrica del espacio-tiempo y permite explicar fenómenos de los que aquella no daba cuenta, como el movimiento del perihelio de Mercurio o la curvatura de un rayo de luz al pasar por las proximidades de una masa grande. La teoría de la gravitación de Newton y la descripción que ésta hace de los fenómenos gravitatorios es válida únicamente en el caso de campos gravitatorios débiles, tal como demostró A. Einstein con la formulación de su teoría de la relatividad. Sin embargo, cabe señalar que en las situaciones de la vida cotidiana (y aún en los viajes de las sondas a través del sistema solar y otras referidas a movimientos planetarios e interplanetarios) bastan los cálculos realizados con la teoría newtoniana para lograr resultados con los niveles de precisión deseados.

2 LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

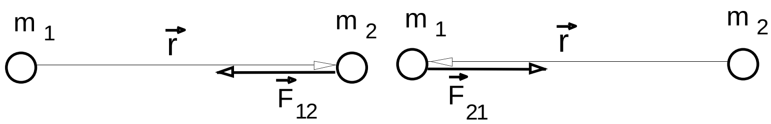
La ley formulada por Isaac Newton justifica las leyes de Kepler proponiendo la existencia de una fuerza central atractiva entre dos masas cualesquiera. Afirma que las fuerzas de atracción mutuas que experimentan dos cuerpos dotados de masa son directamente proporcionales al producto de sus masas e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que los separa.

$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$



La fuerza sobre cada partícula se puede expresar vectorialmente en función del vector de posición con respecto a la otra:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\,\vec{u}_r$$



El signo - se debe a que el sentido de la fuerza es contrario al del vector de posición, (u_r es un vector unitario en esa dirección). G es la constante de gravitación universal.

La ecuación es válida tanto para masas puntuales como para masas que tengan simetría esférica.

Las fuerzas gravitatorias son fuerzas centrales, como se deduce del hecho de que su dirección coincide con la del vector posición. Como la fuerza es central, tiene la característica de ser **conservativa**, lo que permite definir la energía potencial gravitatoria. Además por ser central, el momento angular permanece constante.

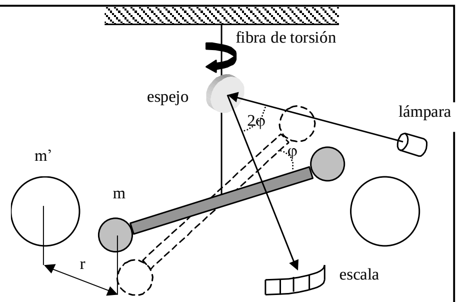
LA CONSTANTE DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

La constante G tiene un valor único para todo el Universo. Su valor fue determinado por primera vez mediante experimentos muy precisos por Cavendish en 1.798 (111 años después de que Newton publicara su ley):

$G=6{,}673\cdot10^{-11}$ Nm²/kg².

Para ello utilizó un aparato denominado *balanza de torsión*,, tal y como se muestra en la figura siguiente. Cuando las masas m´ se colocan cerca de las masas m’, su atracción gravitatoria produce el giro en la barra horizontal que da lugar a la torsión o retorcimiento del hilo un ángulo φ. Dicha torsión φ es proporcional al valor de la fuerza F (realmente es proporcional al momento de las fuerzas, pero como el brazo es constante) y se puede medir con gran precisión mediante la reflexión de un rayo reflejado en un espejo adherido al hilo.

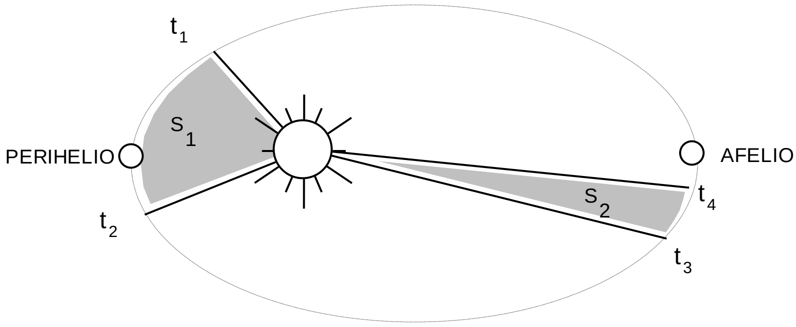
3 LEYES DE KEPLER



Son Leyes experimentales (explican los datos de las observaciones de Tycho Brahe) enunciadas por J. Kepler, sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Son anteriores a la ley de Gravitación de Newton.

1) **La primera ley de Kepler o ley de las órbitas** establece que los planetas describen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos se halla el Sol.

2) Según la **segunda ley de Kepler o ley de las Áreas**, el vector de posición que une los centros del Sol y del planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales (velocidad areolar constante[1]). La ley es válida para todas las fuerzas centrales, y se debe a que el momento angular se conserva en este tipo de fuerzas. $r_1 \cdot m \cdot v_1 = r_2 \cdot m \cdot v_2$
$r_1 v_1 = r_2 v_2$



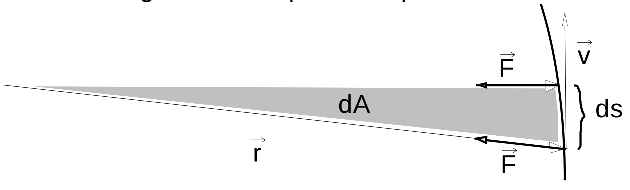
Si el tiempo transcurrido es el mismo $t_2-t_1=t_4-t_3$ las superficies S_1 y S_2 son iguales. Esto significa que el movimiento es más rápido en los puntos más próximos al Sol (Perihelio: punto más próximo). La velocidad es menor en los puntos más lejanos (Zona del afelio: punto más alejado).

3) La **tercera ley de Kepler o ley de los periodos de revolución** establece que los cuadrados de los tiempos empleados por los planetas en su movimiento de revolución son proporcionales a los cubos de la distancia media del planeta al Sol (El radio medio de una órbita se define como la media entre la distancia máxima y mínima del planeta al Sol, es decir, $r_m=(r_{afelio}+ r_{perihelio})/2$. Teniendo en cuenta las propiedades de una elipse, $r_{afelio}=a+c$ y la $r_{perihelio}=a-c$, con lo que $r_m=a$, el semieje mayor. Por tanto, tambien se puede enunciar esta tercera le diciendo que el cuadrado del período de rotación es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita. Si la órbita es circular el radio medio es el radio de la órbita).
$T^2=k \cdot r^3_m$

Las leyes de Kepler se pueden explicar a partir de la ley de Gravitación Universal

---

[1] Velocidad areolar: Área barrida por el vector posición en la unidad de tiempo: $v = \frac{dA}{dt}$ Se puede calcular a partir del momento angular del cuerpo con respecto al foco de la órbita.



Área triang.: $\frac{1}{2} base \bullet altura$

$dA = \frac{1}{2} ds \bullet r = \frac{1}{2}(vdt) \bullet r = \frac{1}{2} rv\,dt$; $v_{areolar} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \bullet v$; como el mom. angular es constante por ser la fuerza central :

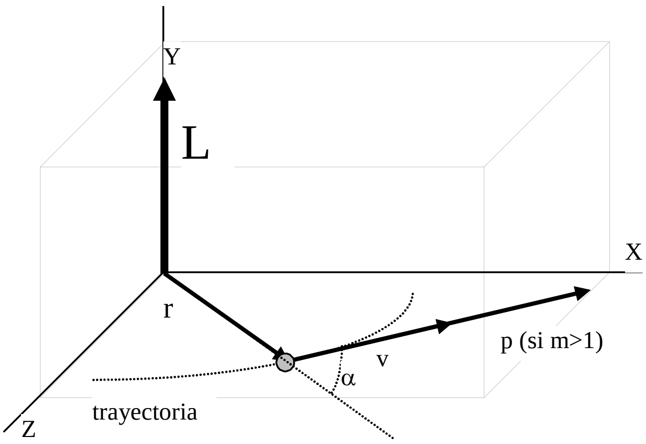
$|\vec{L}| = rmv \quad \Rightarrow \quad rv = \frac{|\vec{L}|}{m}$ es decir $v_{areolar} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}$ como L y m son constantes, también lo es $v_{areolar}$

3.1 Momento angular de una partícula

Se define momento angular de una partícula con respecto a un punto O como el momento con respecto a dicho punto del vector cantidad de movimiento ($\vec{p}$) de la partícula; es decir, es el **producto vectorial**[2] del radiovector que va desde O hasta donde se encuentra la partícula por el vector $m\vec{v}$, su cantidad de movimiento. Se le designa por la letra $\vec{L}_0$.

$\boxed{\vec{L}_0=\overrightarrow{OA}\times m\vec{v}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$

Si tomamos en el siguiente esquema el punto O como origen de coordenadas y suponemos, para facilitar la visualización, que la partícula se desplaza en el plano XZ, se ve la representación del vector $\vec{L}$



Características de $\vec{L}$

- **Módulo:** $|\vec{L}|=|\vec{r}|\times m|\vec{v}|\operatorname{sen}\alpha$. su unidad, en el S.I. será el kgm^2s^{-1}
- **Dirección:** perpendicular al plano formado por el vector velocidad y la posición y, por lo tanto, perpendicular al plano de la trayectoria. (en nuestro ejemplo, sólo tendría componente Z)

Variación de $\vec{L}$ **con el tiempo**

A medida que el cuerpo se mueve, su vector cantidad de movimiento y su vector posición cambiarán y por tanto es lógico que cambie su producto vectorial, es decir, $\vec{L}$. Para estudiar como varia $\vec{L}$ con el tiempo, lo mejor es derivarlo con respecto a él. (para derivar un producto vectorial se siguen la misma regla que con uno entre funciones: derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera por la derivada de la segunda, con la salvedad de que ambos productos son vectoriales).

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

el primero de los 2 sumandos contiene la derivada de la posición frente al tiempo, que es la velocidad instantánea $\vec{v}$. En el segundo sumando contiene la derivada de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo, que según la segunda ley de Newton coincide con la suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula (la resultante de todas ellas). Si hacemos estas sustituciones obtendremos

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{v}\times\vec{p}+\vec{r}\times(\Sigma\vec{F})$$

expresión que puede simplificarse aún más si nos damos cuenta que $\vec{v}$ y $\vec{p}$ son siempre vectores paralelos ($\vec{p}=m\vec{v}$), con lo que su producto vectorial será 0 (α=0). La conclusión de toda esta demostración es la siguiente:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times(\Sigma\vec{F})=\vec{r}\times\vec{R}}$$

El segundo término es el momento de la fuerza resultante aplicada con respecto al mismo punto y se le denomina $\vec{M}_0(\vec{R})$. Llamaremos **momento de una fuerza** con respecto a un punto al momento del vector fuerza con respecto a ese punto. Su unidad en el S.I. es el kgm^2s^{-2} o el N·m, indistintamente.

Lo demostrado anteriormente se puede enunciar diciendo que "la variación del momento angular de una partícula con el tiempo (con respecto a un punto) es igual al momento de la resultante que actúa sobre ella (con respecto al mismo punto)"

[2] En matemáticas el producto vectorial de 2 vectores $\vec{a}x\vec{b}$ es otro vector $\vec{c}$ cuyo módulo es el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman a y b, su dirección es perpendicular al plano formado por a y b y su sentido es el del avance de un tornillo que se mueve del primero al segundo por el camino más corto.

$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(\vec{R})}$, *siendo* $\vec{M} = \vec{r} \times \Sigma\vec{F} = \vec{r} \times \vec{R}$

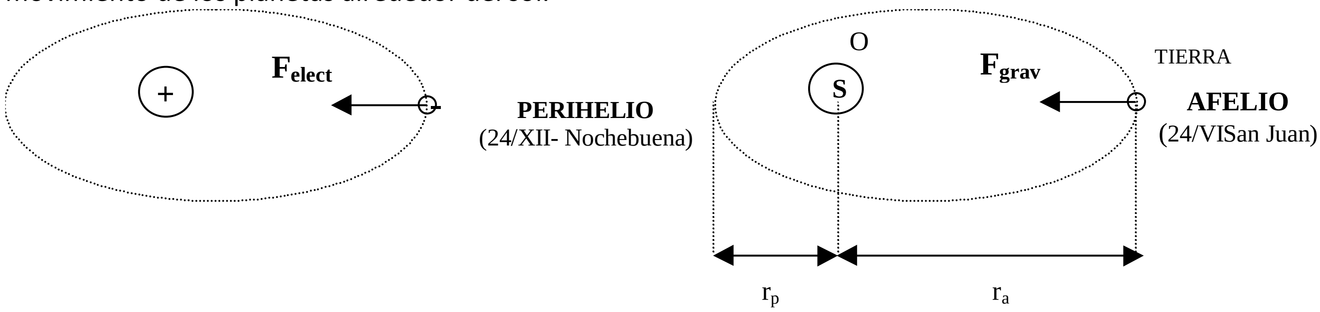
Fuerzas centrales

Para que $\vec{L}$ sea constante, $\vec{M}$ debe ser 0. Si sobre un cuerpo actúa un sola fuerza, para que su momento sea cero ($\vec{M} = \vec{r}$ x $\vec{F}$) debe ocurrir alguno de estos 3 supuestos:

- que la fuerza $\vec{F}$ sea 0, en cuyo caso el cuerpo permanecería en reposo o con velocidad constante. Una partícula libre sobre la que no actuase ninguna fuerza (o la suma sea 0) tiene momento angular constante con respecto a cualquier punto del espacio, ya que $\vec{M}$ =0.
- que $\vec{r}$ =0. Caso nada interesante, ya que si la partícula permanece siempre en ese origen no nos interesa.
- que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ sean siempre paralelos o antiparalelos (α=0º o 180º). La dirección de la fuerza siempre debe pasar siempre por un punto, al que tomaremos como origen O para calcular $\vec{L}$ y $\vec{M}$ .Las fuerzas que apuntan siempre hacia el mismo punto se denominan en Física **Fuerzas Centrales**. Son, por ejemplo, la fuerza eléctrica o la gravitatoria, en el caso de fuerzas fundamentales, o la tensión T de una cuerda. El punto al que apunta siempre una fuerza central se denomina **centro de fuerza**. Acabamos de estudiar que:

"cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza central, su momento angular $\vec{L}$ con respecto al centro de fuerza permanece constante"

Ejemplos de situaciones con fuerzas centrales los encontramos en el modelo atómico de Bohr o en el movimiento de los planetas alrededor del sol.



En este último resulta interesante comprobar que debido a la excentricidad de la órbita elíptica en la que nos movemos alrededor del Sol y teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria sobre la Tierra es central, la velocidad con la que nos movemos no es constante, sino que aumenta cuando pasamos cerca del Sol (Perihelio) y disminuye cuando pasamos a la máxima distancia del mismo (afelio).

Tanto en el afelio como en le perihelio, | $\vec{L}$ |=rmvsen90º=rmv, ya que sólo en esos 2 momentos v y r son perpendiculares. Como $\vec{M}$ =0, $\vec{L}$ =cte y | $\vec{L}$ | también, por lo que $r_a m v_a = r_p m v_p$ (m es la masa de la Tierra). Como $r_p < r_a$, deducimos que $v_p > v_a$.

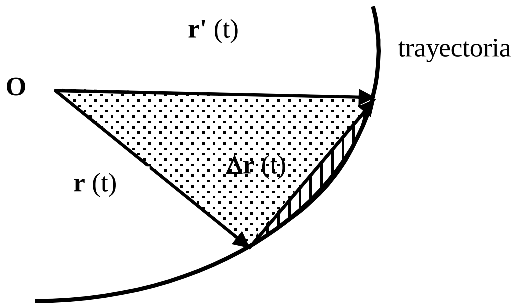
3.2 Consecuencias del principio de conservación del momento angular

Cuando una partícula conserva constante su momento angular, sea por el motivo que sea, su movimiento debe estar sujeto a unas reglas muy estrictas que vienen marcadas por la propia necesidad de que $\vec{L}$ sea constante.

- Para que $\vec{L}$ sea constante en dirección, como es perpendicular al plano de la trayectoria, formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, por la definición de producto vectorial, este plano no puede cambiar, lo cual nos lleva a decir que el movimiento **debe ser de trayectoria plana**.
- Como $\vec{L}$ debe tener siempre el mismo sentido para ser constante y éste viene dado por la regla de la mano derecha aplicada entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$, el cuerpo no puede cambiar de sentido del movimiento. Si la partícula esta girando, siempre debe **girar en el mismo sentido**.
- $\vec{L}$ debe ser constante en módulo. Podemos demostrar que esta necesidad conduce a que el cuerpo, en su movimiento, cumpla la denominada "**Ley de las áreas**", (descubierta de manera experimental por Kepler para el movimiento planetario, aunque la cumple cualquier cuerpo con | $\vec{L}$ | constante). Dicha ley

afirma que *"el área recorrida por el radio vector que une el Sol con un planeta cualquiera (o, mas general, el centro de fuerza con la partícula) recorre áreas iguales en tiempos iguales"*. También se puede enunciar diciendo que el móvil tiene *velocidad areolar* (área recorrida por unidad de tiempo) contante, dS/dt=cte

Demostración:



La figura lateral representa a un cuerpo que sigue la trayectoria marcada y los vectores de posición $\vec{r}$ y $\vec{r}\,'$ en 2 instantes de tiempo distintos (se toma el origen O en el centro de fuerza). El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ se define como $\vec{r}\,'-\vec{r}$ y es el que va desde la punta del 2º a la del 1º. El área recorrido por el radio vector, a la que llamaremos S, sería el área del triángulo cuyos lados son $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ y $\Delta\vec{r}$ (el área punteada, a la que llamaremos A) más el área rayada. El área del triángulo punteado ΔA se puede calcular, teniendo en cuenta la interpretación del módulo de un producto vectorial como:

$\Delta A = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\Delta\vec{r}\right|$. Si dividimos los 2 miembros de la ecuación por Δt y multiplicamos por m para poder escribirlo en función del $|\vec{L}|$ obtenemos. $m\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times m\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$ Si hallamos el limite cuando Δt->0 del cociente de incrementos anterior obtendremos

$$\lim_{\Delta t\to 0} m\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} m\frac{\Delta S}{\Delta t} = m\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times m\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times m\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{L}\right|$$

donde se ha tenido en cuenta que aunque el área recorrida S es mayor que la del triángulo calculado A, la diferencia entre las 2 se hace más pequeña a medida que hacemos que el intervalo de tiempo entre las 2 posiciones tienda a 0 (la diferencia entre S y A es el área rayada, que tiende a 0 cuando Δt->0). Según los visto anteriormente:

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right|}$$

Si admitimos que $|\vec{L}|$=cte, dS/dt también será constante, es decir, el nº de m^2 que el radio vector recorre por s será constante.

4 CAMPOS VECTORIALES: CAMPO GRAVITATORIO

El concepto físico de campo fue introducido por el Inglés **Michael Faraday** (1791-1867) para dar una imagen visualizable de la acción a distancia de las fuerzas. Faraday consideraba que la “acción a distancia” entre los cuerpos no tenía sentido físico y tenía que existir “algo” que empujaba a los cuerpos. Ese “algo” es lo que llamó “Campo”. Las fuerzas entre dos objetos separados se interpretaban como resultado de la interacción entre el cuerpo y el campo en el que está inmerso (producido por el otro cuerpo). El concepto de “Campo” implica un cambio en la manera de entender el mecanismo de una interacción física: supondremos, en primer lugar, que una o varias partículas “perturban” el espacio que les rodea, bien por tener carga eléctrica, masa o momento magnético. Se ha creado el campo. Si a continuación introducimos en esa región del espacio otra partícula con la misma propiedad (es decir, con carga, masa o momento magnético), entonces sentirá la fuerza del campo creado anteriormente, Aunque en un principio el concepto de campo era, tal y como se ha contado aquí, un simple modelo para el estudio de la acción a distancia, hoy la física relativista ha dotado a dicho concepto de una entidad real.

Decimos que hay un **campo** en una región del espacio cuando existe una magnitud física que toma un **valor único** en cada punto de dicha región. A dicha magnitud se la denomina **intensidad de campo** (la tendencia actual, que seguiremos aquí, es denominar campo tanto a la región del espacio como a la magnitud misma).

En Física existen múltiples campos, que se pueden clasificar en 2 grandes grupos: Escalares (si la magnitud física asociada a cada punto es un escalar, como por ejemplo, el campo de temperaturas existente en una habitación o el campo de presiones que todos los dias se observa en los noticiarios de TV) o vectoriales (como puede ser el campo de velocidades de las partículas de un líquido que fluye por una tubería o los campos que estudiaremos en este tema). Los campos escalares se suelen representar mediante las denominadas superficies de nivel (o curvas de nivel, si estamos en 2 dimensiones), que son el lugar geométrico de los puntos del espacio (o del plano, en 2D) en los cuales la magnitud física tiene el mismo valor. Dichas superficies pueden recibir nombres especiales dependiendo del campo: Isotermas (campo de temperaturas), isóbaras(campo de presión) , etc.

De entre los campos vectoriales existentes en Física, cabe destacar aquellos que están de una u otra manera relacionados con alguna fuerza. A estos campos se les denominada campos de fuerza y los mas importantes son el campo gravitatorio, el campo eléctrico y el magnético (este último, al ser no conservativo, se estudia aparte).

El campo gravitatorio es una campo vectorial que se define para cada punto del espacio como la fuerza gravitatoria por unidad de masa situada en ese punto del espacio. Se le designa por la letra g

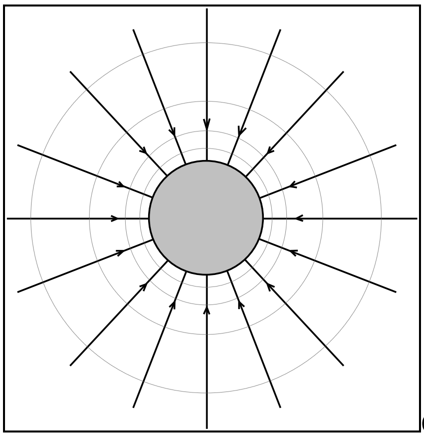
DEFINICIÓN DE CAMPO EN FUNCIÓN DE LA MASA QUE SUFRE EL CAMPO (m)

DEFINICIÓN DE CAMPO EN FUNCIÓN DE LA MASA QUE CREA EL CAMPO (M)

$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}}$ Si el campo lo crea una sola masa$\rightarrow$ $\vec{g} = \frac{1}{\cancel{m}}(-G\frac{\cancel{m} \bullet M}{r^2})\vec{u}_r$ $\boxed{\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r}$

(Es interesante comprobar que el campo gravitatorio así definido tiene un valor único en cada punto del espacio. Por ej, si en un punto culaquiera colocamos una masa de valor 2m, la fuerza que sentirá será 2F, siendo F la fuerza que sentía en dicho punto la masa m, con lo que al dividir fuerza/masa, tendrán los dos casos idéntico cociente)

En el sistema internacional se expresa en: [g]=N/Kg



Campo gravitatorio cerca de la Tierra

En las expresiones que hemos obtenido, la masa M representa al cuerpo que origina el campo gravitatorio. La masa m es la que se encuentra en el seno del campo gravitatorio.

Si nos referimos al campo gravitatorio en la superficie terrestre:

$\vec{g}_0 = -G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}_r \quad ; g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \quad ; 9{,}8 = G\frac{M_T}{R_T^2}$ en diversas ocasiones se hace uso de la igualdad: $g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$.

(En esta última expresión, teniendo en cuenta que conocemos g_0=9,8 m/s^2, R_T=6,37·10^6 m y G=6,673·10^{-11} Nm^2/kg^2, podemos calcular cuál es la masa de la tierra M_T=5,98·10^{24} kg .El artículo en el que Cavendish publicó su valor de G se llamaba "pesando la tierra". Su valor de G era la única magnitud desconocida en la ecuación anterior. Con su pequeña balanza, el científico fue capaz de calcular la masa terrestre).

Principio de Superposición

El principio de superposición afirma que cuando en un punto del espacio actúan dos o más campos , el campo resultante se obtiene sumando vectorialmente los campos que actúan. Esto equivale a decir que los campos son independientes entre sí, o sea, no se modifican mutuamente, sino que se acumulan.

Representación del campo gravitatorio

La representación de un campo vectorial se hace mediante las líneas de campo (también llamadas lineas de fuerza), que tienen la característica de ser tangentes al vector campo en cada punto y de su mismo sentido.

Las líneas de campo se dibujan más juntas en zonas donde el campo es más intenso y más separadas en zonas de menor intensidad (menor módulo)[3] . Las líneas de campo no se cortan unas a otras en ningún punto del espacio (salvo donde esté situado el centro de una masa), ya que de hacerlo existirían dos tangentes distintas en el punto de corte, una para cada línea de campo, y por tanto dos posibles valores del campo, en contradicción con la definición de campo vista anteriormente (un valor para cada punto). En la figura adjunta se da la representación del campo gravitatorio en las proximidades de la Tierra.

5 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Como el campo gravitatorio es un campo central, es un campo conservativo. La fuerza gravitatoria realiza un trabajo independiente de la trayectoria y por tanto se puede definir la energía potencial gravitatoria de un sistema formado por dos masas separadas una distancia r .

$$\Delta E_{pot} = -w_{cons} \quad ; \Delta E_{pot} = -\int_{r_0}^{r_F} \vec{F}_g d\vec{r} = -\int_{r_0}^{r_F} -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r d\vec{r} = +GmM\int_{r_0}^{r_F}\frac{dr}{r^2} = GmM\left.\frac{-1}{r}\right|_{r_0}^{r_F}$$

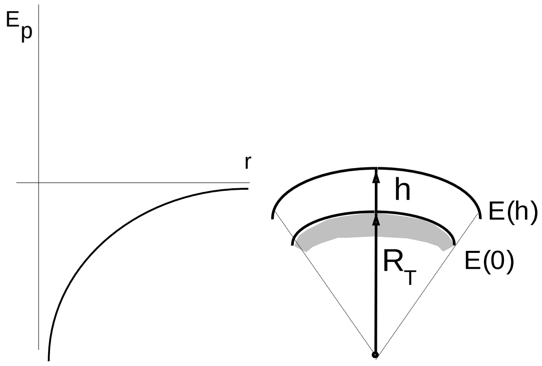
$$\Delta E_{pot} = GmM\left(\frac{-1}{r_F} - \frac{-1}{r_0}\right) = \frac{-GmM}{r_F} - \frac{-GmM}{r_0}$$

$$E_{pot}(F) = \frac{-GmM}{r_F} + C \qquad E_{pot}(0) = \frac{-GmM}{r_0} + C$$

Por convenio se suele tomar como E_{pot} nula la del sistema cuando $r=\infty$ por lo que $C=0$; $E_{pot}(\infty)=0$
por lo tanto:

$$\boxed{E_{pot} = \frac{-GmM}{r}}$$

Características importantes de esta expresión son: la energía potencial siempre es negativa (excepto en el infinito donde es cero) , cuando disminuye la distancia entre masas disminuye la energía potencial, puesto que su valor absoluto aumenta y es negativa. La gráfica de E_p en función de la separación entre masas es la siguiente:



La energía potencial cuando un cuerpo se encuentra en las proximidades de la superficie terrestre se puede determinar en función de la altura h sobre ella como ya conocemos ($E_p=mg_0h$), la diferencia con respecto a lo que hemos obtenido estriba en que elegimos el nivel de energía cero en la superficie de la Tierra.

$$\left.\begin{aligned} E_p(h) &= -G\frac{mM_T}{r} = -G\frac{mM_T}{R_T + h} \\ E_p(0) &= -G\frac{mM_T}{r_0} = -G\frac{mM_T}{R_T} \end{aligned}\right\} E_p(h) - E_p(0) = -G\frac{mM_T}{R_T + h} + G\frac{mM_T}{R_T}$$

[3] De hecho, se utiliza el convenio de pintar las lineas de campo de tal manera que el nº de ellas que atraviesan la unidad de superficie colocada en un punto perpendicularmente a las lineas coincida con el valor del campo en dicho punto.

$$E_P(h)-E_p(0)=-GM_Tm\left(\frac{1}{R_T+h}-\frac{1}{R_T}\right)=-GM_Tm\left(\frac{R_T-R_T-h}{R_T\bullet(R_T+h)}\right)=\frac{GM_Tm}{R_T^2}\frac{h}{\frac{R_T\bullet(R_T+h)}{R_T^2}}=g_0mh\frac{1}{1+\frac{h}{R_T}}$$

Si consideramos alturas pequeñas en comparación con el radio terrestre $h<<R_T$ el último cociente es 1.
$\Delta Ep=m\cdot g_0\cdot h$ para valores de $h<<R_T$

POTENCIAL GRAVITATORIO.

El potencial gravitatorio es una magnitud escalar que se define en cada punto del espacio como la energía potencial gravitatoria por unidad de masa situada en ese punto.

$$V_g=\frac{E_p(grav)}{m}$$ (m: masa que soporta el campo).

Si el campo lo crea una sola masa

$$V_g=-G\frac{mM}{r}\bullet\frac{1}{m}=-G\frac{M}{r}$$ (M:masa que origina el campo)

Con el criterio habitual (considerar 0 la E_{pot} en el infinito) el potencial sería negativo en cualquier punto del espacio excepto en el infinito.

Las unidades en que se mide el potencial son J/Kg en el Sistema Internacional.

El campo gravitatorio, se puede representar también mediante las líneas equipotenciales (unen puntos de igual potencial). Estas líneas son perpendiculares en cada punto del espacio a las líneas de campo, pero el manejo es más sencillo, puesto que el potencial es una magnitud escalar. En el dibujo del campo gravitatorio terrestre, las líneas equipotenciales están representadas mediante líneas discontinuas.

Por último podemos señalar que la misma relación que hay entre energía potencial y fuerza existe entre campo gravitatorio y potencial, pues, al fin y al cabo, esto últimos son los primeros por unidad de masa. Recordando la relación vistan en el tema de W y E, podemos escribir $\vec{F}=-\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r$. Si dividimos en ambos miembros de la igualdad por m y, como es constante, la introducimos dentro de la derivada del 2º miembro nos queda $\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=-\frac{d(\frac{E_p}{m})}{dr}\vec{u}_r=-\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$, pudiendo obtener las mismas conclusiones que obtuvimos en el tema de W yE, pero referidas a la relación campo-potencial. Así, si tenemos una gráfica de la función potencial, el valor del campo en cada punto coincidirá con la pendiente de la curva de potencial en dicho punto. El signo menos nos indica, como entonces, que el campo se opone al crecimiento del potencial, o dicho de otra manera, el campo siempre apunta hacia las zonas de menor potencial. Como entonces tambien, si el potencial tiene en un punto derivada cero (por ser un valor mínimo, máximo o constante), el campo también será cero en dicho punto y por tanto la fuerza gravitatoria también. Será un punto de equilibrio estable, inestable o indiferente.

6 MOVIMIENTO DE SATÉLITES Y PLANETAS EN CAMPOS GRAVITATORIOS.

En los sistemas constituidos por partículas sometidas exclusivamente a la acción de fuerzas centrales (suponemos despreciable la acción del rozamiento u otras fuerzas ajenas a la gravitatoria), el movimiento está determinado por dos características fundamentales

a) El **momento angular del sistema permanece constante**, $\vec{L}=\vec{r}\wedge m\vec{v}$; $|\vec{L}|=rmv\,sen\,\alpha=cte.$ Como consecuencia, el movimiento se produce en un plano.

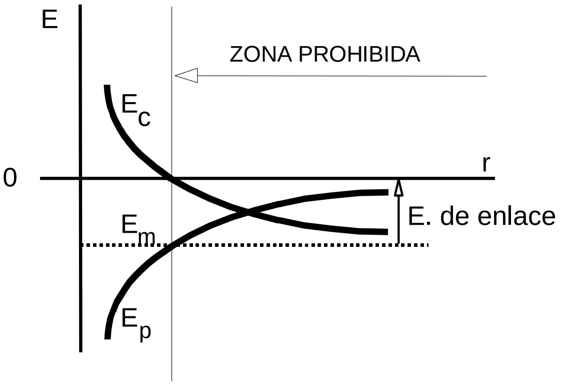
b) La energía mecánica del sistema permanece constante, E_{mec} =cte. E_{mec}= E_{cin}+ E_{pot}

$$E_{Mec}=\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{mM}{r}\right)$$

Se pueden presentar 3 situaciones a estudiar: $E_{mec}>0$, $E_{mec}=0$, $E_{mec}<0$.

SISTEMAS LIBRES Y SISTEMAS LIGADOS.

a)



a) La energía mecánica es **negativa**. A partir de un r determinado, las partículas no pueden separarse, puesto que la energía cinética sería negativa y la velocidad del cuerpo imaginaria. Por lo tanto, están obligadas a estar próximas una de otra y nunca escaparán de su atracción mutua. Es un **SISTEMA LIGADO**. A la energía mínima que hay que aportar a un sistema ligado para que se convierta en libre (por tanto, para que llegue a $E_m=0$) se denomina **ENERGÍA DE ENLACE**.

Observa que la energía de enlace es la que hay que aportar y por tanto es positiva coincidiendo para los sistemas enlazados con $|E_m|$.

Las órbitas descritas con esta energía son cerradas, se puede demostrar que su ecuación es la de una elipse. Un caso particular de elipse es el de la circunferencia, en la que los dos ejes son iguales; en este caso la ecuación es fácil de obtener porque la fuerza gravitatoria es la fuerza normal, que provoca el movimiento circular.

$F_g = m \cdot a_N \quad ; G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \quad ; v_{orb}^2 = \frac{GM}{r}$ luego $\boxed{v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$

El periodo del movimiento circular sería:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ elevando al cuadrado $\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$ como dice la 3ª ley de Kepler

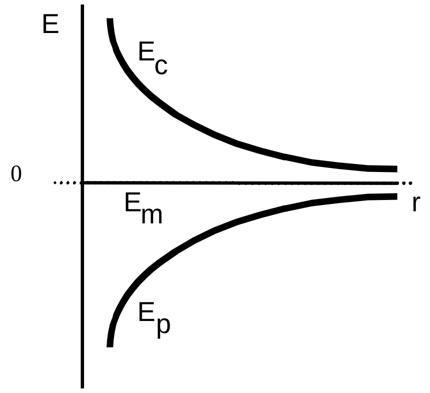
La E_{mec} en este caso valdría $E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$; $E_{MEC} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{mM}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{r}\right) - G\frac{mM}{r} = \frac{GmM}{2r} - \frac{GmM}{r}$

Es decir $\boxed{E_{MEC} = -G\frac{mM}{2r}}$, o sea $E_{mec}<0$ (como suponíamos en principio).

La energía mecánica en una órbita circular es justamente la mitad de la energía potencial (como son cantidades negativas la mitad de un número es mayor que el propio número).

Esta energía (en valor absoluto) sería la mínima que deberíamos comunicar al sistema para que las partículas se separaran hasta el infinito (allí tendrían velocidad cero), es decir sería la ENERGÍA DE ENLACE

b)



b) La energía mecánica del sistema es **cero**. Las partículas pueden separarse JUSTO hasta el infinito, al que llegarán con velocidad 0. Es un **SISTEMA LIBRE** (Se definen como libres aquellos sistemas con **$E_m \geq 0$**).

En este caso que nos encontramos, una magnitud que tiene gran importancia es la denominada **VELOCIDAD DE ESCAPE**, que es la velocidad mínima que debe llevar un cuerpo en un punto determinado para que consiga escapar de la atracción de otro. El caso mas típico es el del lanzamiento de un cohete (sin propulsión, o sea sin motores para que se conserve la E_m) desde la tierra. Si pretendemos que escape de la atracción terrestre porque nos interesa salir a recorrer otros planetas y volver al nuestro cuando queramos, el cohete debe llegar al "infinito", que es donde estrictamente la fuerza de atracción vale 0 ($r=\infty$) y así no volvería. Si además es la velocidad mínima, pretendemos que llegue a ese infinito "parado”, sin exceso de velocidad, con lo que la E_m para la separación infinita sería 0 y estaremos en el caso que nos ocupa, el caso **b)**.

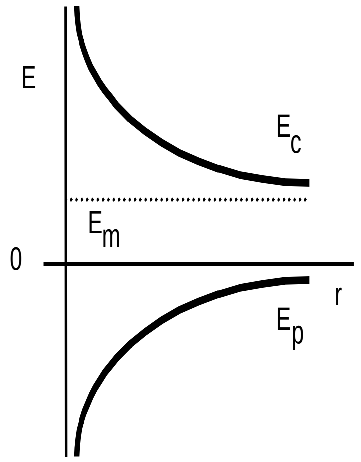
La velocidad pedida corresponde a la energía cinética que sumada a la energía potencial en ese punto de lanzamiento vale 0, como se puede ver en el diagrama anterior. Para un cohete que se lanza desde la superficie terrestre, la velocidad de escape se puede demostrar que es:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \left(-G\frac{\cancel{m}M}{r}\right) = 0 \quad ; v^2 = \frac{2GM}{r} \quad \boxed{v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

donde M es la masa del planeta y R es la distancia desde el punto considerado al centro del planeta. Observar que depende del punto donde se lance, R, pero no de la masa m del cuerpo que se lance; es la misma para un cohete que para una piedra. Desde la superficie de la tierra, $R=6,37\cdot10^6$ m; $G=6,67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/Kg^2$ y $M=5,97\cdot10^{24}$ Kg, se obtiene para la velocidad de escape un valor de 11181 m/s $\approx$11,2 km/s aproximadamente, que pasa a ser de 11 km/s si el cuerpo se lanza a h=200 km por encima de la superficie terrestre (R=Rt+h). A esa altura aproximadamente paró los motores el Apolo XI en su viaje a la luna y llevaba lógicamente esa velocidad.

El movimiento seguiría una trayectoria abierta. Se puede demostrar que la ecuación correspondería a la de una parábola.

c)

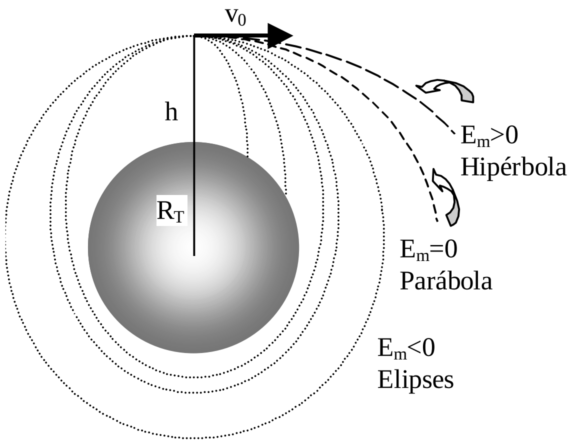


c) La energía mecánica del sistema es **positiva**. El sistema puede separarse indefinidamente y llevar a separación infinita con v>0. En un sistema **LIBRE** o **NO LIGADO**.

Un sistema de este tipo podrá evolucionar hasta la total separación (hasta el infinito) de sus componentes aunque se atraigan, ya que tienen energía suficiente para hacerlo.

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \left(-G\frac{\cancel{m}M}{r}\right) > 0 \quad ; \frac{v^2}{2} > G\frac{M}{r}$$

Se puede comprobar que la trayectoria sería una hipérbola y la trayectoria es abierta.



Trayectorias de una partícula lanzada horizontalmente desde una altura h sobre la superficie terrestre con una velocidad v_0. (Tomado de “Física, curso universitario”, de Alonso Finn, Marcelo.*pg. 420*)

7 ANEXO 1:

7.1.1 VARIACION DE g CON LA ALTURA

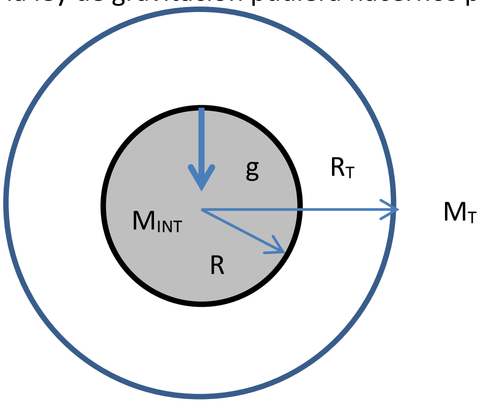
Ya sabemos que para calcular g cuando quien crea el campo no es una masa puntual, sino una esfera homogénea y uniforme (que supondremos es la Tierra) la consideraremos como si toda su masa estuviese concentrada en el centro terrestre. Es decir:

$$g = G\frac{M_T}{R^2} = g_0\frac{R_T^2}{R^2} = g_0\left(\frac{R_T}{R}\right)^2 = \frac{cte}{R^2}$$

Vemos que el valor de la g disminuye con R^2, siendo igual a g_0 si $R=R_T$ (h=0) e igual a $g_0/4$ si $R=2R_T$ ($h=R_T$).

7.1.2 VARIACION DE g CON LA PROFUNDIDAD

En este caso asumiremos (se puede demostrar matemáticamente mediante un concepto, el de flujo de un campo vectorial, y un teorema, el de Gauss, que veremos posteriormente) que el campo gravitatorio en un punto situado a un radio R del interior de una esfera maciza y homogénea es el que crearía una masa m', que se correspondería con la masa de la esfera interior de radio R, situada en el centro de la esfera. Para calcular el valor de g en ese punto sólo se tiene en cuenta la masa de la esfera interior que pasa por dicho punto (por tanto en el centro de la Tierra la gravedad será 0, y no infinito como una aplicación superficial de la ley de gravitación pudiera hacernos pensar).



Para calcular la masa interior contenida en esa esfera de radio R ($R<R_T$) usaremos el concepto de densidad. Hallaremos la densidad de la Tierra y multiplicándola posteriormente por el volumen de esa esfera calcularemos la masa que encierra M_{INT}.

$$M_{INT} = d_T \cdot V_{INT} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = M_T\frac{R^3}{R^3},$$

siendo d_T la densidad terrestre y V_{INT} el volumen interior de la esfera de radio R, coincidente a través de la cuál estamos calculando el flujo. Igualando los dos valores para el flujo y utilizando la relación $g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$ nos queda

$$|\vec{g}| = G\frac{M_{INT}}{R^2} = G\frac{M_T\frac{R^3}{R_T^3}}{R^2} = G\frac{M_T R}{R_T^3} = g_0\frac{R}{R_T}$$

que nos indica que el valor de g disminuye linealmente a medida que nos acercamos al centro de la tierra (R disminuye) siendo cero en el mismo (la ingravidez real). Podemos comprobar que la ecuación obtenida anteriormente es exacta si nos fijamos que para $R=R_T$, el valor de g es g_0. Podemos representar como varia el campo gravitatorio dentro y fuera de la corteza terrestre utilizando las dos funciones anteriores:

$$g(R) = \begin{cases} g_0\dfrac{R}{R_T} & \text{si } R \le R_T \\ g_0\dfrac{R_T^2}{R^2} & \text{si } R \ge R_T \end{cases}$$